Università degli Studi di Udine, Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Esami di FISICA I (9 CFU) e Fisica Generale 1 (12 CFU)
A.A. 2019/2020, Sessione di Settembre, Secondo Appello, 22 Settembre 2020, Prova scritta

---

TESTI E SOLUZIONI DEI PROBLEMI

PROBLEMA 1

Una corpo puntiforme di massa $m = 1.00$ kg è appoggiato su una molla ideale disposta verticalmente; la molla a sua volta poggia sul pavimento di un ascensore.
Inizialmente l'ascensore è fermo e in tali condizioni la molla risulta compressa di un $\Delta\ell_0 = 30.0$ cm.

A. Determinare la costante elastica della molla.

Supporre poi che l'ascensore salga con un'accelerazione costante a e che, nel sistema di riferimento dell'ascensore, all'equilibrio la molla risulti compressa di un ulteriore $\Delta\ell = 15.0$ cm.

B. Qual'è il modulo dell'accelerazione a?

Infine, supporre che l'ascensore salga a velocità costante con $v = 2.50$ m/s e che ad un certo istante si arresti improvvisamente. Determinare:

C. la compressione della molla durante la salita uniforme dell'ascensore;

D. la frequenza del moto oscillatorio del corpo agganciato alla molla dopo l'arresto dell'ascensore;

E. l'ampiezza dell'oscillazione.

Soluzione Considerando le forze che agiscono sul corpo e imponendo l'equilibrio statico quando l'ascensore è in quiete, abbiamo (prendendo un asse verticale diretto verso l'alto)

$$k\Delta\ell_0 - mg = 0 \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{mg}{\Delta\ell_0} = 32.7 \text{ N/m}.$$

Invece, quando l'ascensore sale con accelerazione costante, l'equazione del moto per il corpo puntiforme sarà la seguente

$$ma = k(\Delta\ell_0 + \Delta\ell) - mg,$$

e conseguentemente

$$a = \frac{k(\Delta\ell_0 + \Delta\ell) - mg}{m} = \frac{k\Delta\ell}{m} = \frac{\Delta\ell}{\Delta\ell_0}g = g/2 = 4.90 \text{ m/s}^2,$$

dove si è tenuto conto del fatto che, dalla precedente, è $k\Delta\ell_0 = mg$.
Durante la salita uniforme dell'ascensore la compressione della molla è la stessa di quando era in quiete, dato che la sua accelerazione è nulla!
Quando l'ascensore, che si muoveva verso l'alto con una velocità costante v, si arresta, l'oscillazione che si innesca è quella tipica di un sistema massa molla! Quindi, la pulsazione del moto oscillatorio armonico in questione è

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Conseguentemente, la frequenza dell'oscillazione è

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = 0.910 \text{ Hz}.$$

Per l'ampiezza di oscillazione possiamo ragionare come segue. Durante l'oscillazione si conserva l'energia meccanica quindi confrontando la posizione del corpo nell'istante di arresto dell'ascensore (in cui il corpo ha una velocità v) con quello in cui il corpo si arresta (massima quota che esso raggiunge), possiamo scrivere

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\Delta\ell_0^2 = \frac{1}{2}k(A - \Delta\ell_0)^2 + mgA,$$

dove con A abbiamo indicato lo spostamento verso l'alto del corpo rispetto alla sua posizione di massima velocità. Tale quantità corrisponde, ovviamente, all'ampiezza dell'oscillazione.
Sviluppando il quadrato e facendo le debite semplificazioni, si ottiene la seguente

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2 - k\Delta\ell_0 A + mgA \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2.$$

Si noti che l'ultima espressione dimostra che, come spesso fatto notare, prendendo come punto di zero dell'energia potenziale elastica il punto di equibrio del corpo, l'oscillazione può essere trattata senza tirare in ballo l'energia potenziale gravitazionale!
Quindi, si ricava

$$A^2 = \frac{m}{k}v^2 \qquad \Rightarrow \qquad A = \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot v = 43.7 \text{ cm}.$$

PROBLEMA 2

Una sfera omogenea di massa $M = 30.0$ kg è posta in quiete su un piano orizzontale. Ad un certo istante la sfera viene colpita orizzontalmente, lungo la direttrice che passa per il suo centro, da un corpo puntiforme di massa $m = 200$ g che viaggia ad una velocità $v_0 = 100$ m/s. L'urto tra i due è perfettamente elastico e la sfera, durante e dopo l'urto, non slitta sul piano.
Determinare i valori che, subito dopo l'urto, avranno le velocità:

A. v_1 del corpo puntiforme;

B. v_{cm} del centro di massa della sfera.

Supponendo poi che, nell'urto, il contatto tra corpo puntiforme e sfera abbia una durata $\Delta t = 0.100$ s,

C. stimare il verso e il valor medio del modulo della forza di attrito statico che, durante l'urto, agisce sul punto di istantaneo contatto tra sfera e piano di appoggio.

[*Il momento d'inerzia di una sfera omogea rispetto ad un'asse per il suo centro è* $I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2$.]

Soluzione Prima di tutto notiamo che nell'urto **non si può** imporre la conservazione della quantità di moto per il sistema corpo+sfera. Infatti, il punto della sferra in contatto con il piano d'appoggio, rimanendo fisso (la sfera non. scivola), agisce come vincolo e, all'atto dell'urto, la forza di attrito statico $\vec{f}_s$ che non permette lo scivolamento della sfera, per il sistema corpo+sfera deve essere vista come una forza esterna!
Al contrario, il momento angolare del sistema rispetto all'asse passante per il punto di contatto tra sfera e piano d'appoggio si conserva, dato che la suddetta forza esterna, $\vec{f}_s$, non ha momento rispetto a tale punto. Essendo poi l'urto elastico, si conserva anche l'energia cinetica del sistema.
Le conservazioni di tali quantità possono essere tradotte nelle seguenti relazioni

$$\begin{cases} Rmv_0 = Rmv_1 + I_P \dfrac{v_{cm}}{R} \\ \\ \dfrac{1}{2}mv_0^2 = \dfrac{1}{2}mv_1^2 + \dfrac{1}{2}I_P \dfrac{v_{cm}^2}{R^2} \end{cases}$$

dove $I_P = I_{cm} + MR^2 = \frac{7}{5}MR^2$ (dal teorema degli assi paralleli) è il momento d'inerzia della sfera rispetto all'asse per il punto di contatto con il piano di appoggio.
Riscrivendo opportunamente le due equazioni precedenti e dividendo membro a membro si ottiene

$$\left.\begin{aligned} m(v_0 - v_1) &= \frac{I_P}{R^2}v_{cm} \\ \\ m(v_0^2 - v_1^2) &= \frac{I_P}{R^2}v_{cm}^2 \end{aligned}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad v_0 + v_1 = v_{cm},$$

dalla quale segue che

$$v_1 = v_{cm} - v_0.$$

Inserendo questa nella prima equazione, con qualche passaggio

$$mv_0 = m(v_{cm} - v_0) + \frac{I_P}{R^2}v_{cm} \qquad \rightarrow \qquad 2mv_0 = \left(m + \frac{I_P}{R^2}\right)v_{cm}$$

si ricava

$$v_{cm} = \frac{2mR^2}{mR^2 + I_P} v_0 = \frac{10m}{5m + 7M} v_0 = 0.948 \text{ m/s}.$$

Conseguentemente è

$$v_1 = v_{cm} - v_0 = \left(\frac{10m}{5m + 7M} - 1 \right) v_0 = \left(\frac{5m - 7M}{5m + 7M} \right) v_0 = -99.1 \text{ m/s}.$$

Come si vede, dopo l'urto il corpo puntiforme rimbalza indietro quasi con la stessa velocità iniziale!
Ora che conosciamo le velocità finali (dopo l'urto) del corpo e del c.d.m. della sfera, possiamo valutare la variazione di quantità di moto che l'intero sistema ha subito; cioè

$$\Delta P_{tot} = m(v_1 - v_0) + M v_{cm} = -\frac{4mM}{5m + 7M} v_0,$$

che è palesemente negativa!
Per il teorema dell'impulso, tale quantità deve essere pari all'impulso totale ricevuto dal sistema J_{tot} che a sua volta è pari, per definizione, a

$$J_{tot} = \int_{t_i}^{t_f} f_s \mathrm{d}t \equiv \bar{f}_s \Delta t$$

dato che f_s è l'unica forza esterna presente (qui $\bar{f}_s$ è il valor medio di f_s).
Pertanto,

$$J_{tot} = \Delta P_{tot} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}_s \Delta t = -\frac{4mM}{5m + 7M} v_0 \quad \Rightarrow \quad \bar{f}_s = -\frac{4mM}{(5m + 7M)\Delta t} v_0 = -114 \text{ N}.$$

Il segno negativo di $\bar{f}_s$ indica che $\vec{\boldsymbol{f}}_s$ è diretta in verso opposto a $\vec{\boldsymbol{v}}_0$ e questo è in accordo con il fatto che essa deve opporsi allo scivolamento della sfera.
In alternativa, il calcolo di $\bar{f}_s$ si poteva seguire anche in uno dei due seguenti modi equivalenti.

i) Tenendo conto che la velocità del c.d.m. della sfera varia del tempo Δt da 0 a v_{cm}, si potrebbe stimare l'accelerazione media del c.d.m. della sfera come $\bar{a}_{cm} = v_{cm}/\Delta t$. Da questa si poteva ricavare $\bar{\alpha} = \bar{a}_{cm}/R$ e quindi, applicando la seconda legge della dinamica in forma angolare all'asse passante per il c.d.m. della sfera, scrivere $I_{cm}\bar{\alpha} = R\bar{f}_s$ e da qui $\bar{f}_s$.

ii) Con il teorema dell'impulso si poteva valutare la forza media agente sul corpo puntiforme, $J_m = \Delta p_m = m(v_1 - v_0) = \bar{F}_m \Delta t$. Da questa si ricavava la forza media sulla sfera, $\bar{F}_M = -\bar{F}_m$ e quindi, utilizzando la seconda legge in forma lineare, si scriveva $M v_{cm}/\Delta t = \bar{F}_M - \bar{f}_s$ e da qui $\bar{f}_s$.

PROBLEMA 3

Un recipiente cilindrico adiabatico, di area di base $A = 1.00$ m^2, è disposto verticalmente ed è aperto superiormente. In fondo al recipiente vi sono n moli di un gas ideale biatomico che è tenuto separato dall'aria soprastante (vedi figura **aa)**) tramite un pistone adiabatico e a tenuta, di massa trascurabile. In tali condizioni il gas ha un volume $V_0 = 1.00$ m^3 ed è alla temperatuta $T_0 = 15°$ C.

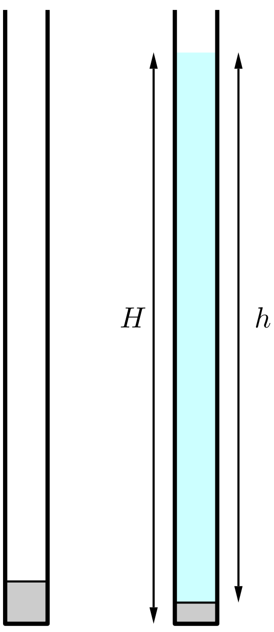
A. Determinare il numero di moli n di gas presenti nel recipiente.

Successivamente (vedi la figura **bb)**) nel recipiente viene aggiunta (lentamente) dell'acqua fino a quando il volume del gas sottostante si riduce a $V_1 = V_0/2$.

Determinare:

B. l'altezza h della colonna d'acqua;

C. la temperatura T_1 a cui si porta il gas dopo l'immissione dell'acqua.



aa) **bb)**

Infine, si supponga che l'acqua sia stata prelevata da un grande serbatoio a livello del suolo e che, tramite una pompa, sia stata portata all'imboccatura del recipiente ad una quota H pari alla quota della sommità della colonna d'acqua. Nell'ipotesi che l'acqua sia stata pompata ad una velocità costante $v = 10.0$ m/s e al ritmo di 10.0 dm^3/s, determinare (in assenza di dissipazioni)

D. la potenza meccanica necessaria per azionare la pompa.

Soluzione Dato che nella situazione a) il gas è alla pressione atmosferica, $p_0 = 1$ atm $= 1.013 \cdot 10^5$ Pa, con la legge dei gas otteniamo, immediatamente, che il numero di moli è

$$n = \frac{p_0 V_0}{R T_0} = 42.3 \text{ mol},$$

dove abbiamo ovviamente posto $T_0 = 288$ K.

Mentre viene immessa acqua il gas viene compresso adiabaticamente e reversibilmente (dato che tutto avviene lentamente). Così, sfruttando l'equazione delle adiabatiche possiamo ricavare

$$p_0 V_0^\gamma = p_1 V_1^\gamma \qquad \Rightarrow \qquad p_1 = \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^\gamma p_0 = 2^\gamma p_0 = 2.64 \cdot p_0 = 2.67 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

Conseguentemente, per l'altezza della colonna d'acqua, abbiamo

$$p_1 = p_0 + \rho g h \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{p_1 - p_0}{\rho g} = 16.9 \text{ m},$$

dove $\rho = 1000$ kg/m^3 è la densità dell'acqua.

Così abbiamo che la sommità della colonna d'acqua è ad una quota $H = 0.50 \text{ m} + h = 17.4$ m.

Per la temperatura finale raggiunta dal gas abbiamo

$$T_0 V_0^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1} \qquad \Rightarrow \qquad T_1 = \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\gamma-1} T_0 = 2^{\gamma-1} T_0 = 1.32 \cdot T_0 = 380 \text{ K} = 107\ {}^\circ\text{C}.$$

Quando la pompa è in azione, ogni massa dm di acqua che prima era in quiete e a quota zero acquisisce, per merito della pompa, un'energia meccanica

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{2}\mathrm{d}m v^2 + \mathrm{d}m g H = \left(\frac{1}{2}v^2 + gH\right)\mathrm{d}m = \left(\frac{1}{2}v^2 + gH\right)\rho R_V \mathrm{d}t,$$

dove abbiamo scritto $\mathrm{d}m = \rho R_V \mathrm{d}t$ con $R_V = 10$ dm^3/s $= 0.010$ m^3/s corrispondente alla portata volumica con cui l'acqua viene pompata e dt è il tempo infinitesimo a cui si riferisce dE e dm.

Pertanto, se non ci sono dissipazioni, la potenza meccanica necessaria ad azionare la pompa è

$$P = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{1}{2}v^2 + gH\right)\rho R_V = 2.21 \text{ kW}.$$