Università degli Studi di Udine, Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Esami di FISICA I (9 CFU) e Fisica Generale 1 (12 CFU)
A.A. 2019/2020, <u>Sessione di Gennaio/Febbraio</u>, Primo Appello, 19 gennaio 2021, Prova scritta

---

TESTI E SOLUZIONI DEI PROBLEMI

PROBLEMA 1

Un'automobile di massa $m = 1000$ kg e lunghezza $\ell = 4.00$ m è posizionata in modo tale che il suo bordo posteriore sia sul bordo di una piattaforma di massa $M = 6000$ kg e lunghezza $L = 30.0$ m. La piattaforma poggia su una pista di ghiaccio e può scivolare con attrito trascurabile su di essa. In caso di moto dell'auto supporre che le sue ruote non scivolino rispetto alla piattaforma. Sia l'auto che la piattaforma sono inizialmente in quiete.
Supporre ora che l'auto si sposti dall'altro lato della piattaforma nel seguente modo: prima l'auto accelera con accelerazione costante $a' = 3.00$ m/s^2 (rispetto alla piattaforma) fino a che il suo centro raggiunge il centro della piattaforma; poi decelera con accelerazione $-a'$ (sempre rispetto alla piattaforma) fino a che il suo bordo anteriore raggiunge fermandosi il bordo opposto della piattaforma.
Determinare:

A. il tempo che impiega l'auto per effettuare l'intero spostamento;

B. il massimo modulo della velocità raggiunta dalla piattaforma durante lo spostamento dell'auto;

C. di quanto e in quale direzione si sposta la piattaforma.

[*Assumere che sia la piattaforma che l'auto siano assimilabili a parallelepipedi con massa distribuita omogeneamente.*]

Soluzione Nel sistema di riferimento solidale con la piattaforma, l'auto percorre una distanza $d = L - \ell = 26.0$ m. In ognuna delle due fasi di accelerazione e decelerazione l'auto si sposta di una distanza (sempre rispetto alla piattaforma) $d/2$. Pertanto, essendo i due moti uniformemente accelerati, il tempo che impiega per effettuare ognuno dei due é

$$\frac{d}{2} = \frac{1}{2}a' t_{1/2}^2 \qquad \Rightarrow \qquad t_{1/2} = \sqrt{\frac{d}{a'}} = \sqrt{\frac{L-\ell}{a'}}.$$

Quindi, il tempo complessivo necessario per l'intero spostamento è

$$t_{tot} = 2t_{1/2} = 2\sqrt{\frac{L-\ell}{a'}} = 5.89 \text{ s}.$$

Si noti che durante lo spostamento la massima velocità raggiunta dall'auto rispetto alla piattaforma è

$$v'_{max} = a' t_{1/2} = \sqrt{(L-\ell)a'} = 8.83 \text{ m/s}.$$

Durante lo spostamento le uniche forze orizzontali che intervengo sono le forze che le ruote dell'auto e la piattaforma si scambiano; tali forze sono, ovviamente, uguali ed opposte. Questo fatto ci deve far capire che la risultante delle forze esterne è nulla e che quindi la quantità di moto del sistema, auto+piattaforma deve conservarsi. In altre parole, in un sistema di riferimento solidale con la pista di ghiaccio, indicando con v e V le velocità di auto e piattaforma, istante per istante dovrà essere

$$mv + MV = 0.$$

Ma la velocità v dell'auto può essere espressa in termini della sua velocità rispetto alla piattaforma attraverso la seguente

$$v = V + v',$$

e quindi

$$m(V + v') + MV = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V = -\frac{m}{m+M}v',$$

che ci dice che la piattaforma si muove in verso opposto a quello che fà l'auto. Conseguentemente, il massimo modulo della velocità della piattaforma è

$$|V|_{max} = \frac{m}{m+M} v'_{max} = \frac{m}{m+M} \sqrt{(L-\ell)a'} = 1.26 \text{ m/s}.$$

Infine, la conservazione della quantità di moto del sistema comporta anche che il centro di massa del sistema rimanga fermo (dato che lo era anche inizialmente)! Perciò, consideriamo un asse x orizzontale diretto verso destra e poniamo la sua origine in corrispondenza del bordo sinistro della piattaforma prima dello spostamento. Imponendo che l'ascissa del centro di massa, prima e dopo lo spostamento, rimanga inalterata, abbiamo la seguente

$$m\frac{\ell}{2} + M\frac{L}{2} = M\left(\Delta x_p + \frac{L}{2}\right) + m\left(\Delta x_p + L - \frac{\ell}{2}\right),$$

dove con Δx_p abbiamo indicato lo spostamento del bordo sinistro della piattaforma. Da questa si ricava

$$\Delta x_p = -\frac{m(L-\ell)}{m+M} = -3.71\,\text{m},$$

che ci dice anche che la piattaforma si sposta verso sinistra.
Si noti anche che, nel frattempo, rispetto alla pista di ghiaccio l'auto si è spostata di una distanza

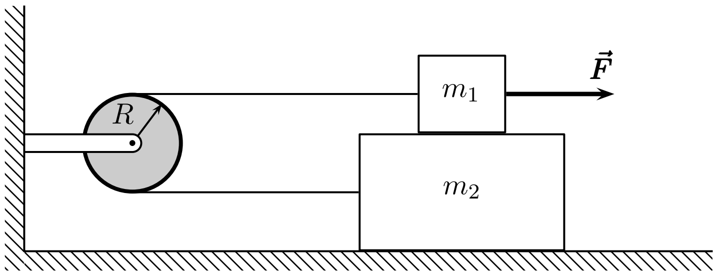
$$\Delta x_{auto} = \Delta x_p + L - \ell = \frac{M(L-\ell)}{m+M} = 22.3 \text{ m}.$$

PROBLEMA 2

Due blocchi di massa $m_1 = 6.00$ kg e $m_2 = 10.0$ kg sono collegati come in figura da un filo inestensibile (ma perfettamente flessibile) e di massa trascurabile che passa per una puleggia (assimilabile ad un cilindro omogeneo) di raggio $R = 15.0$ cm e massa $m = 8.00$ kg. Al blocco 1 è applicata una forza $\vec{F}$ di modulo costante diretta come in figura. Si assuma che la puleggia possa ruotare senza attrito intorno al suo asse, che il filo non scivoli rispetto alla puleggia, che non ci sia attrito fra i blocchi 1 e 2 mentre tra blocco 2 e piano di appoggio sia presente attrito con i coefficienti di attrito statico e dinamico pari a $\mu_s = 0.600$ e $\mu_k = 0.400$, rispettivamente.
Determinare:

A. il valore del modulo della forza $\vec{F}$, F_{max}, al di sotto del quale il sistema rimane in equilibrio statico;

B. l'accelerazione angolare α della puleggia nel caso di $F = 2F_{max}$ (F_{max} è quello richiesto al punto **A.**).



Soluzione

Consideriamo un asse x diretto come la forza $\vec{F}$. Indichiamo con T_1 e T_2 le tensioni delle corde agganciate rispettivamente ai blocchi 1 e 2 e con f_a il modulo della forza di attrito (statico o dinamico, a seconda dei casi) agente sul blocco 2. Applicando la 2^a legge della dinamica nelle forme lineare (ai blocchi 1 e 2) e angolare (alla puleggia), si ottengono le seguenti:

$$\begin{cases} m_1 a_1 = F - T_1 \\ m_2 a_2 = -T_2 + f_a \\ I\alpha = R(T_1 - T_2) \end{cases}$$

a_1 e a_2 sono le accelerazioni lineari dei due blocchi; α e $I = \frac{1}{2}mR^2$ sono l'accelerazione angolare e il momento d'inerzia della puleggia.
In caso di equilibrio statico le accelerazioni sono nulle. Quindi le precedenti si riducono alle

$$\begin{cases} 0 = F - T_1 \\ 0 = -T_2 + f_s \\ 0 = R(T_1 - T_2) \end{cases}$$

dove f_s è ora il modulo della forza di attrito statico. Risolvendo si ottiene $T_1 = T_2 = T$ e

$$f_s = T = F.$$

Conseguentemente, essendo

$$f_s \leq \mu_s N_2 = \mu_s(m_1 + m_2)g,$$

si ricava

$$F = f_s \leq \mu_s(m_1 + m_2)g \quad \Rightarrow \quad F \leq F_{max} = \mu_s(m_1 + m_2)g = 94.2 \text{ N}.$$

Se il modulo di $\vec{F}$ viene posto a $2F_{max}$ il sistema non sarà più in equilibrio. In tal caso, data l'inestensibilità del filo, avremo

$$a_1 = a; \quad a_2 = -a; \quad \alpha = a/R.$$

D'altra parte, a causa del movimento del blocco 2, avremo $f_a = f_k = \mu_k N_2 = \mu_k(m_1 + m_2)g$. Quindi, le equazioni del moto diventano

$$\begin{cases} m_1 a = F - T_1 \\ -m_2 a = -T_2 + f_k \\ \frac{1}{2}ma = T_1 - T_2 \end{cases}$$

Risolvendo otteniamo

$$a = \frac{F - f_k}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m}.$$

Quindi, esplicitando $F = 2F_{max} = 2\mu_s(m_1 + m_2)g$ e $f_k = \mu_k((m_1 + m_2)g$, si ottiene

$$a = \frac{2F_{max} - f_k}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m} = \frac{(2\mu_s - \mu_k)(m_1 + m_2)g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m} = 6.28 \text{ m/s}^2.$$

Infine è

$$\alpha = \frac{a}{R} = 41.9 \text{ rad/s}^2.$$

PROBLEMA 3

Si abbiano $n = 2.50$ mol di un gas monoatonico e si consideri per esso un'**espansione adiabatica reversibile** dallo stato 1 con $V_1 = 20.0 \text{ dm}^3$ allo stato 2 con $V_2 = 4 \cdot V_1$ e $p_2 = 1.50$ atm.

A. Determinare le temperature T_1 e T_2 degli stati 1 e 2 e la pressione p_1 dello stato 1.

Si consideri poi, per lo stesso gas, un'**espansione adiabatica irreversibile** con stato iniziale con volume V_1 e stato finale identico (in tutto) a quello dell'espansione reversibile vista nella prima parte del problema. Supponendo di poter variare la temperatura dello stato iniziale T_i dell'attuale trasformazione mantenendo inalterate le sue caratteristiche di espansione adiabatica irreversibile, determinare:

B. il massimo valore di T_i;

C. il minimo valore di T_i.

Soluzione La temperatura dello stato 2 (di cui al punto A) è

$$T_2 = \frac{p_2 V_2}{nR} = 4\frac{p_2 V_1}{nR} = 585 \text{ K}.$$

Tenendo presente che la trasformazione (di cui al punto A) è un adiabatica reversibile per T_1 e p_1 abbiamo

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \qquad \Rightarrow \qquad T_1 = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} T_2 = 4^{\gamma-1} T_2 = 4^{2/3} T_2 = 1474 \text{ K};$$
$$p_1 V_1^{\gamma} = p_2 V_2^{\gamma} \qquad \Rightarrow \qquad p_1 = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma} p_2 = 4^{\gamma} p_2 = 15.1 \text{ atm} = 1.53 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2,$$

dove si è tenuto conto del fatto che è $\gamma = c_p/c_V = 5/3$.
Ora passiamo alla seconda parte del problema in cui l'espansione adiabatica è **irreversibile**. Si noti subito che, come nel caso precedente, il sistema continua ad essere chiuso, ma ora, essendo la trasformazione irreversibile, la 2^a legge della termodinamica ci dice che deve essere

$$\Delta S_{if} > 0.$$

Per una qualsiasi trasformazione di un gas ideale tra due stati di equilibrio la variazione di entropia può essere calcolata attraverso la seguente

$$\Delta S_{if} = n c_V \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + nR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right).$$

Conseguentemente, imponendo la precedente maggiorazione (e tenendo presente che è $V_i = V_1$ e $V_f = V_2$, otteniamo

$$c_V \ln\left(\frac{T_i}{T_2}\right) < R \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = R \ln 4 \qquad \Rightarrow \qquad \ln\left(\frac{T_i}{T_2}\right) < \frac{R}{c_V} \ln 4 = \ln\left(4^{R/c_V}\right) = \ln\left(4^{\gamma-1}\right),$$

e quindi

$$T_i < T_{i,max} = 4^{\gamma-1} T_2 = 2.52 \cdot T_2 = 1474 \text{ K}.$$

Come si vede, a causa dell'irreversibilità la temperatura dello stato iniziale deve mantenersi al di sotto di quella che lo stesso stato aveva nel caso dell'espansione reversibile.
Ma c'è anche un'altra condizione che l'espansione adiabatica irreversibile deve soddisfare: essendo un'espansione, deve essere

$$L_{if} > 0.$$

Essendo un'adiabatica, dalla 1^a legge della termodinamica, segue che

$$L_{if} = -\Delta E_{int,if} = -n c_V (T_f - T_i) = n c_V (T_i - T_2) > 0 \qquad \Rightarrow \qquad T_i > T_2 = 585 \text{ K}.$$

Riassumendo si ha

$$585 \text{ K} < T_i < 1474 \text{ K}.$$
