***Università degli Studi di Udine, Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica***
***Esami di FISICA I (9 CFU) e Fisica Generale 1 (12 CFU)***
***A.A. 2019/2020, Sessione di Gennaio/Febbraio, Secondo Appello, 5 febbraio 2021,***
***Prova scritta***

---

## TESTI E SOLUZIONI DEI PROBLEMI

---

### PROBLEMA 1

Un corpo, di massa $m_1 = 1000$ kg, viene lanciato in direzione radiale dalla superficie terrestre con una velocità iniziale $v_0$ pari ai tre quinti (3/5) della sua velocità di fuga, $v_{fuga}$.

**A.** Determinare la massima distanza $r_{max}$ dal centro della Terra che raggiunge il corpo.

Nell'esatto momento in cui il corpo si trova alla distanza $r_{max}$ (quella calcolata nel punto **A.**), viene colpito da un meteorite di massa $m_2 = 2m_1$. Sapendo che l'urto con il meteorite è completamente anelastico e che il corpo venutosi a formare prende a ruotare intorno alla Terra sull'orbita circolare di raggio $r_{max}$, determinare:

**B.** il tempo che impiega il corpo impiega a fare un giro completo intorno alla Terra;

**C.** la velocità $v_2$ che il meteorite aveva prima dell'urto, specificandone la direzione;

**D.** l'energia persa nell'urto.

[*Nei calcoli trascurare sia la resistenza dell'atmosfera che la rotazione terrestre. Per la massa e il raggio terrestri utilizzare i seguenti valori:* $M = 5.98 \cdot 10^{24}$ kg, $R = 6.37 \cdot 10^6$ m.]

***Soluzione***

Nella fase di allontanamento del corpo dalla Terra possiamo applicare la conservazione dell'energia meccanica. Quando il corpo raggiunge il punto più distante, la sua velocità sarà nulla e quindi vale la seguente

$$\frac{1}{2}m_1 v_0^2 - G\frac{Mm_1}{R} = -G\frac{Mm_1}{r_{max}}.$$

La velocità di fuga di un corpo che parte dalla superficie terrestre è quella velocità che rende la sua energia meccanica nulla. Quindi è

$$\frac{1}{2}m_1 v_{fuga}^2 - G\frac{Mm_1}{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{fuga}^2 = \frac{2GM}{R} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{3}{5}v_{fuga} = \frac{3}{5}\sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Quindi, tornando alla conservazione dell'energia meccanica, abbiamo

$$\frac{1}{2}v_0^2 - G\frac{M}{R} = -G\frac{M}{r_{max}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{25}\cdot\frac{2GM}{R} - G\frac{M}{R} = -G\frac{M}{r_{max}} \quad \Rightarrow \quad r_{max} = \frac{25}{16}R = 9.95\cdot 10^6 \text{ m}.$$

Dopo l'urto con il meteorite, il corpo che viene a formarsi segue l'orbita circolare di raggio $r_{max}$. Conseguentemente, la sua velocità $v$ deve soddisfare le seguenti

$$3m_1\frac{v^2}{r_{max}} = G\frac{M\cdot 3m_1}{r_{max}^2} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{GM}{r_{max}} = \frac{16}{25}\frac{GM}{R} \quad \rightarrow \quad v = \frac{4}{5}\sqrt{\frac{GM}{R}} = 6.33\cdot 10^3 \text{ m/s}.$$

Conseguentemente, il tempo che impiega a fare un giro completo è

$$T = \frac{2\pi r_{max}}{v} = \frac{125\pi}{32}\sqrt{\frac{R^3}{GM}} = 9.88\cdot 10^3\,\text{s} \approx 2.74\,\text{h}.$$

La velocità del corpo dopo l'urto è perpendicolare alla direzione lungo la quale il corpo di massa $m_1$ si era mosso allontanandosi dalla Terra. Ovviamente, dato che nell'urto con il meteorite si conserva la quantità di moto ed essendo nulla la velocità del corpo 1 al momento dell'impatto, anche la velocità $\vec{v}_2$ sarà perpendicolare alla direttrice su cui si era mosso il corpo 1.
Quindi, essendo l'urto perfettamente anelastico, la conservazione della quantità di moto si esprimerà come segue

$$m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v \quad \Rightarrow \quad 2m_1 v_2 = 3m_1 v \quad \rightarrow \quad v_2 = \frac{3}{2} v = \frac{6}{5}\sqrt{\frac{GM}{R}} = 9.50 \cdot 10^3 \text{ m/s}.$$

L'energia persa nell'urto è pari alla differenza tra le energie cinetiche dei corpi prima e dopo l'urto stesso. Cioè

$$W = \frac{1}{2} 2m_1 v_2^2 - \frac{1}{2} 3m_1 v^2 \quad \Rightarrow \quad W = \frac{12}{25}\frac{GMm_1}{R} = 3.01 \cdot 10^{10} \text{ J}.$$

---

**PROBLEMA 2**

Un cilindro omogeneo di massa $M = 10.0$ kg e raggio $R = 12.0$ cm poggia su un piano orizzontale. Al centro di massa del cilindro è agganciata una corda ideale (inestensibile e di massa trascurabile) al cui altro estremo è appeso un corpo di massa $m$. La puleggia indicata in figura si intende

di massa trascurabile e priva di attrito.

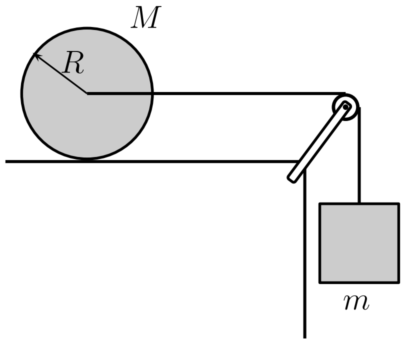
Sapendo che il coefficiente di attrito statico tra cilindro e piano è $\mu_s = 0.300$ determinare:

**A.** il valore massimo di $m$, $m^*$, entro il quale il moto del cilindro è di puro rotolamento.

Sapendo poi che il coefficiente di attrito dinamico tra cilindro e piano è $\mu_k = \frac{2}{3}\mu_s$ e supponendo $m = 25.0$ kg, determinare:

**B.** il tipo di moto del cilindro (puro rotolamento o no);

**C.** l'accelerazione lineare con cui scende il corpo di massa $m$ e l'accelerazione angolare del cilindro.




***Soluzione*** Supponendo il moto del cilindro di puro rotolamento, l'applicazione della $2^a$ legge della dinamica nelle forme lineare e angolare ai due corpi ci permette di scrivere le seguenti equazioni

$$\begin{cases} ma = mg - T \\ Ma = T - f_s \\ I_{cm}\alpha = Rf_s \end{cases}$$

dove $a$ è l'accelerazione (verso il basso) del corpo appeso e (verso destra) del centro di massa del cilindro, $\alpha$ è l'accelerazione angolare del cilindro, $T$ è la tensione della corda e $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$ è il momento d'inerzia del cilindro rispetto all'asse per il c.d.m. Tenendo presente che $\alpha = a/R$ (essendo il moto di puro rotolamento), risolvendo abbiamo

$$T = mg - ma; \quad f_s = \frac{I_{cm}}{R^2} a; \quad \rightarrow \quad \left(M + m + \frac{I_{cm}^2}{R^2}\right) a = mg$$
$$\Rightarrow \quad a = \frac{mg}{M + m + \frac{I_{cm}}{R^2}} = \frac{2mg}{3M + 2m}; \quad f_s = \frac{Mmg}{3M + 2m}.$$

Ma per $f_s$ vale la seguente

$$f_s \leq f_{s,max} = \mu_s N = \mu_s Mg,$$

e perciò otteniamo

$$\frac{Mmg}{3M+2m} \le \mu_s Mg \quad \Rightarrow \quad m \le m^* = \frac{3\mu_s}{1-2\mu_s}\cdot M = 22.5\,\text{kg}.$$

Con $m = 25.0$ kg superiamo il limite appena calcolato e quindi in tal caso il cilindro slitterà sul piano. In tal caso le equazioni del moto saranno le seguenti

$$\begin{cases} ma = mg - T \\ Ma = T - f_k = T - \mu_k Mg \\ I_{cm}\alpha = Rf_k = R\mu_k Mg \end{cases}$$

dove ora $\alpha \neq a/R$. Combinando le prime due abbiamo

$$T = mg - ma; \quad (M+m)a = mg - \mu_k Mg \quad \Rightarrow \quad a = \frac{(m-\mu_k M)g}{M+m} = 6.45\,\text{m/s}^2.$$

Dalla terza otteniamo invece

$$\alpha = \frac{\mu_k RMg}{I_{cm}} = \frac{2\mu_k g}{R} = 32.7\ \text{rad/s}^2.$$

---

**PROBLEMA 3**

In un recipiente cilindrico, dotato di pistone, di volume $V_1 = 50.0\,\text{dm}^3$ sono contenute $n = 2.50$ mol di un gas ideale biatomico alla pressione di 1.00 atm in equilibrio termico con l'ambiente.

**A.** Determinare la temperatura dell'ambiente circostante.

A partire da questo stato (stato 1) il gas subisce 3 trasformazioni: prima, agendo sul pistone, il gas viene compresso reversibilmente e adiabaticamente fino allo stato 2 con volume $V_2 = V_1/2$; poi, tenendo fisso il pistone, si attende fino a che il gas raggiunge lo stato 3 in cui è di nuovo in equilibrio termico con l'ambiente; infine, sempre agendo sul pistone, il gas viene fatto espandere reversibilmente e isotermicamente fino a riportarlo allo stato 1.

Determinare nel complesso di trasformazioni:

**B.** la massima temperatura raggiunta dal gas;

**C.** il lavoro complessivo fatto dal pistone sul gas;

**D.** la variazione di entropia dell'ambiente durante la seconda trasformazione.

***Soluzione*** La. temperatura del gas nello stato 1 corrisponde anche alla temperatura dell'ambiente circostante è

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR} = 244\,\text{K}.$$

Il complesso di trasformazioni costituisce un ciclo. Nel ciclo abbiamo una prima compressione adiabatica reversibile ($1 \to 2$), poi una trasformazione isocora irreversivile ($2 \to 3$) e quindi un'espansione isoterma reversibile ($3 \to 1$). Nella trasformazione $1 \to 2$ deve essere $TV^{\gamma-1} =$ cost. con $\gamma = c_p/c_V = 7/5$ (dato che il gas è biatomico). Quindi,

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1} \qquad \Rightarrow \qquad T_2 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \cdot T_1 = 2^{\gamma-1}\cdot T_1 = 322\,\text{K}.$$

Questa costituisce anche la massima temperatura raggiunta dal gas.

Dalla Prima legge della termodinamica possiamo subito ricavare che il lavoro compiuto in tale trasformazione è

$$L_{12} = -\Delta E_{int,12} = -nc_V(T_2 - T_1) = \frac{5}{2}nR\left(1-2^{\gamma-1}\right)T_1 = \frac{5}{2}nR\left(1-2^{2/5}\right)T_1.$$

Nella trasformazione $2 \to 3$ il pistone è mantenuto fisso e quindi il lavoro compiuto è nullo. Infine, nella trasformazione $3 \to 1$ il lavoro compiuto è pari a

$$L_{3\to 1} = \int_3^1 p\mathrm{d}V = nRT_1 \int_3^1 \frac{\mathrm{d}V}{V} = nRT_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right).$$

Il lavoro complessivo fatto dal gas è quindi

$$L = L_{1\to 2} + L_{2\to 3} + L_{3\to 1} = nRT_1 \left[\frac{5}{2}(1 - 2^{2/5}) + \ln 2\right] = -536\,\mathrm{J}.$$

Essendo questo il lavoro compiuto dal gas nel ciclo, il lavoro compiuto dal pistone sarà pari a

$$L_{\mathrm{pistone}} = -L = 536\,\mathrm{J}.$$

Nella trasformazione isocora $2 \to 3$ il gas scambia calore irreversibilmente con l'ambiente circostante. Dalla prima legge della termodinamica abbiamo

$$Q_{23} = \Delta E_{int,12} = nc_V(T_3 - T_2) \equiv nc_V(T_1 - T_2) = \frac{5}{2}nRT_1(1 - 2^{2/5}).$$

e quindi il calore scambiato dall'ambiente durante tale trasformazione è

$$Q_{amb,23} = -Q_{23} = \frac{5}{2}nRT_1(2^{2/5} - 1) > 0.$$

Perciò, la corrispondente variazione di entropia (l'ambiente si mantiene a temperatura costante $T_1$) è

$$\Delta S_{amb,12} = \frac{Q_{amb,23}}{T_1} = \frac{5}{2}nR(2^{2/5} - 1) = 16.6\,\mathrm{J/K}.$$

Si noti che durante la stessa trasformazione la variazione di entropia subita dal gas è

$$\Delta S_{23} = nc_V \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) = n\frac{5}{2}R \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = n\frac{5}{2}R(1-\gamma)\ln 2 = -nR\ln 2 = 14.4\,\mathrm{J/K}.$$

Conseguentemente, durante la seconda trasformazione la variazione di entropia dell'*universo* (gas+ambiente) è

$$\Delta S_{universo,23} = \Delta S_{23} + \Delta S_{amb,23} = nR\left[-\ln 2 + \frac{5}{2}(2^{2/5} - 1)\right] = 2.19\,\mathrm{J/K} > 0,$$

in accordo con il fatto che la trasformazione è irreversibile e che l'universo è un sistema chiuso!

---