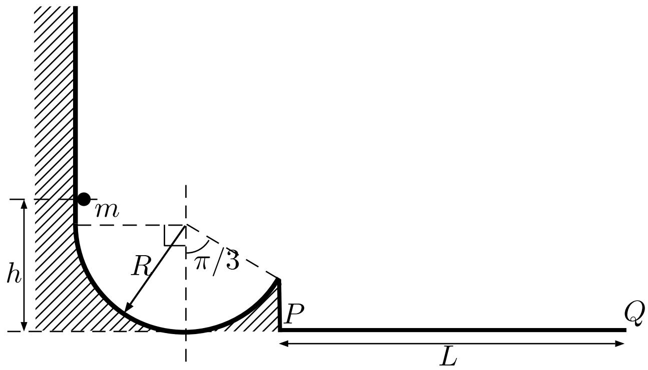
Università degli Studi di Udine, Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Esami di FISICA I (9 CFU) e Fisica Generale 1 (12 CFU)
A.A. 2020/2021, Sessione di Giugno/Luglio, Primo Appello, 21 giugno 2021, Prova scritta

TESTI E SOLUZIONI DEI PROBLEMI

PROBLEMA 1 Come mostrato in figura, una guida è costituita da un tratto verticale rettilineo e da un arco di circonferenza di raggio $R = 50.0\,\text{cm}$; la parte destra dell'arco di circonferenza ha un apertura (rispetto alla verticale) di $\pi/3$. Affiancata alla guida vi è un tratto rettilineo orizzontale di lunghezza $L = 3R$ (dal puntp P al punto Q) alla quota del punto più basso della guida.



Un punto materiale di massa m viene lasciato libero (in quiete) da un punto della guida ad una quota iniziale h (misurata dal punto più basso della guida); il corpo, dopo aver scivolato lungo la guida stessa, cadrà (dopo un breve volo) sul tratto orizzontale. Trascurando ogni tipo di attrito (sia con la guida che con l'aria), determinare:

A. il valore di h, h_P, affiché il punto materiale cada nel punto P;

B. il valore di h, h_Q, affiché il punto materiale cada nel punto Q;

C. la massima quota raggiunta dal punto materiale durante il suo volo nel caso di $h = R$.

Soluzione

Prima di tutto si noti che non essendo presenti attriti, in tutto il moto del punto materiale si conserva l'energia meccanica. In particolare, per la parte di moto lungo la guida potremo scrivere

$$mgh = mgy_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad \Rightarrow \qquad v_0^2 = 2g(h - y_0) \tag{$*$}$$

dove y_0 è la quota dell'estremo destro della guida circolare rispetto all'orizzontale P–Q, mentre v_0 è il modulo della velocità alla fine della guida; dalla figura si capisce subito che è

$$y_0 = R\sin(\pi/6) = \frac{R}{2}.$$

Quindi, se $h > R/2$ allora il punto materiale raggiungerà la fine della guida e negli istanti successivi seguirà un moto parabolico. Se v_0 è il modulo della velocità, considerando un sistema di riferimento con origine in P, asse x orizzontale verso destra e asse y verticale verso l'alto, le componenti della velocità all'inizio della parabola saranno (vedi figura)

$$v_{0x} = v_0\cos\theta_0 = v_0\cos(\pi/3) = \frac{1}{2}v_0; \qquad v_{0y} = v_0\sin\theta_0 = v_0\sin(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}v_0,$$

dove $\theta_0 = \pi/3$ è l'angolo di uscita della guida.

Perciò le equazioni orarie che regolano il moto del punto materiale nel moto parabolico sono

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x}t = \dfrac{1}{2}v_0 t \\[2ex] y(t) = y_0 + v_{0y}t - \dfrac{1}{2}gt^2 = \dfrac{1}{2}R + \dfrac{\sqrt{3}}{2}v_0 t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x(t) = v_{0x} = \dfrac{1}{2}v_0 \\[2ex] v_y(t) = v_{0y} - gt = \dfrac{\sqrt{3}}{2}v_0 - gt \end{cases} \tag{$**$}$$

Nel caso **A.**, dovendo il punto materiale cadere in P, si capisce immediatamente che dovrà arrivare alla fine della parte circolare con $v_0 \approx 0$. Conseguentemente, da $(*)$ segue immediatamente che la quota iniziale dovrà essere identica a $R/2$; cioè

$$h_P = \frac{1}{2}R = 25.0\,\text{cm}.$$

Nel caso **B.** invece, imponiamo nelle $(**)$

$$\frac{1}{2}vt = L = 3R \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}R + \frac{\sqrt{3}}{2}vt - \frac{1}{2}gt^2 = 0.$$

Otteniamo

$$t = \frac{6R}{v} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}R + \frac{\sqrt{3}}{2}v\frac{6R}{v} - \frac{1}{2}g\left(\frac{6R}{v}\right)^2 = 0,$$

da cui

$$1 + 6\sqrt{3} - \frac{36Rg}{v^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v^2 = \frac{36Rg}{1+6\sqrt{3}}.$$

Conseguentemente, dalla $(*)$ si ha

$$2g\left(h - \frac{R}{2}\right) = \frac{36Rg}{1+6\sqrt{3}} \qquad \Rightarrow \qquad h = h_Q = \left(\frac{1}{2} + \frac{18Rg}{1+6\sqrt{3}}\right)R = 2.08 \cdot R = 104\,\text{cm}.$$

Infine, se $h = R$ dalla $(*)$ abbiamo

$$v_0^2 = 2g\left(h - \frac{R}{2}\right) = Rg \qquad \Rightarrow \qquad v_0 = \sqrt{Rg}. \tag{$***$}$$

La massima quota raggiunta dal punto materiale durante il suo volo parabolico si avrà nell'istante in cui la componente verticale della sua velocità si annulla; cioè quando

$$v_y(t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{\sqrt{3}}{2g}v_0,$$

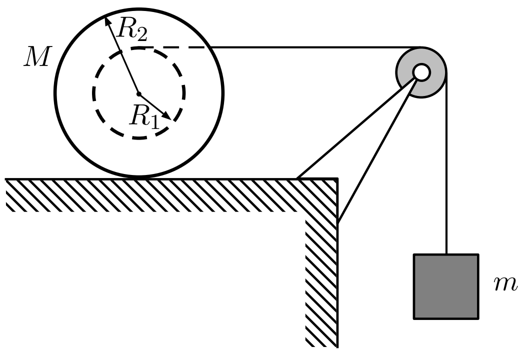
e conseguentemente la quota sarà

$$y_{max} = y\left(\frac{\sqrt{3}}{2g}v_0\right) = \frac{1}{2}R + \frac{3}{4}\frac{v_0^2}{g} - \frac{3}{8}\frac{v_0^2}{g} = \frac{1}{2}R + \frac{3}{8}\frac{v_0^2}{g}.$$

Inserendo il valore di v_0 ottenuto nella $(***)$, si ricava

$$y_{max} = \frac{1}{2}R + \frac{3}{8}\frac{Rg}{g} = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\right)R = \frac{7}{8}R = 43.7\,\text{cm}.$$

PROBLEMA 2 Si consideri il sistema rappresentato in figura in cui un cilindro omogeneo di massa $M = 20.0\,\text{kg}$ e raggio esterno $R_2 = 20.0\,\text{cm}$ viene tirato da una corda al cui altro capo è appeso un corpo di massa $m = 5.0$ kg. Come schematizzato in figura, la corda è avvolta su una gola presente sulla superficie del cilindro avente raggio $R_1 = 10.0\,\text{cm}$. La piccola puleggia indicata in figura non presenta attriti e ha massa trascurabile. Supponendo che il cilindro rotoli senza scivolare, si determini:



A. l'accelerazione a con cui scende il corpo di massa m;

B. le accelerazioni angolare α e del del centro di massa a_{cm} del cilindro;

C. il minimo valore del coefficiente di attrito statico necessario affinché il cilindro non scivoli.

[Supporre che la corda non scivoli rispetto al cilindro e, ai fini del calcolo del momento d'inerzia del cilindro, non tenere conto della gola.]

Soluzione

Detta T la tensione della corda, considerando le forze applicate ai due corpi, applicando la seconda legge della dinamica possiamo scrivere le seguenti

$$ma = mg - T; \qquad Ma_{cm} = T + f_s, \tag{$*$}$$

dove a è l'accelerazione (verso il basso) del corpo di massa m, a_{cm} è l'accelerazione (verso destra) del centro di massa del cilindro e f_s è il modulo della forza di attrito statico $\vec{f}_s$ tra cilindro e piano d'appoggio che si è scelta diretta verso destra.
D'altra parte, rispetto al punto di istantaneo contatto del cilindro con il piano d'appoggio, la seconda legge della dinamica in forma angolare ci dà

$$I_P\alpha = (R_1 + R_2)T, \tag{$**$}$$

dove I_P è il momento d'inerzia del cilindro rispetto all'asse passante per il punto di istantaneo contatto con il piano di appoggio e $\alpha = a_{cm}/R_2$ è l'accelerazione angolare del cilindro. Facendo appello al teorema degli assi paralleli abbiamo che

$$I_P = I_{cm} + MR_2^2 = \frac{1}{2}MR_2^2 + MR_2^2 = \frac{3}{2}MR_2^2.$$

Tenendo presente che la corda tira il cilindro da un punto a distanza $R_1 + R_2$ dal punto di istantaneo contatto, mentre il c.d.m. del cilindro è a distanza R_2 dallo stesso punto, si capisce che

$$\frac{a}{R_1+R_2} = \frac{a_{cm}}{R_2} \quad\Rightarrow\quad a_{cm} = \frac{R_2}{R_1+R_2}a = \frac{2}{3}a \quad\Rightarrow\quad \alpha = \frac{a_{cm}}{R_2} = \frac{a}{R_1+R_2}.$$

Tornando all'equazione ($**$) otteniamo

$$\frac{3}{2}MR_2^2\frac{a_{cm}}{R_2} = (R_1+R_2)T \quad\Rightarrow\quad T = \frac{3}{2}M\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)a_{cm} = Ma_{cm} = \frac{2}{3}Ma,$$

e quindi sostituendo nella prima delle ($*$) si ricava[1]

$$ma = mg - \frac{2}{3}Ma \quad\Rightarrow\quad \left(m + \frac{2}{3}M\right)a = mg \quad\Rightarrow\quad a = \frac{3m}{3m+2M}\cdot g = 2.67\ \mathrm{m/s^2}.$$

Conseguentemente, per le accelerazioni del cilindro abbiamo

$$a_{cm} = \frac{2}{3}a = 1.78\,\mathrm{m/s^2}; \qquad \alpha = \frac{a}{R_1+R_2} = 8.92\,\mathrm{rad/s^2}.$$

Infine, dalla seconda delle ($*$), otteniamo

$$f_s = Ma_{cm} - T = \frac{2}{3}Ma - \frac{2}{3}Ma = 0,$$

che dimostra che la forza di attrito statico è nulla! Morale, non c'è bisogno di attrito statico affinchè il moto del cilindro sia di puro rotolamento!

---

[1] Si noti che il problema poteva essere risolto anche applicando la seconda legge della dinamica in forma angolare all'asse passante per il centro di massa del cilindro. In tal caso avremmo sostituito la ($**$) con la seguente

$$I_{cm}\alpha = R_1T - R_2f_s,$$

dove $I_{cm} = \frac{1}{2}MR_2^2$ è il momento d'inerzia del cilindro rispetto all'asse per il suo centro di massa. Conseguentemente, esplicitando α e I_{cm} avremmo potuto ricavare

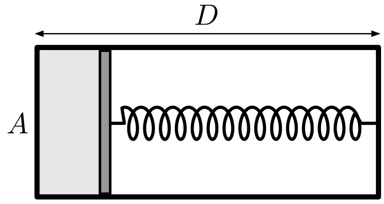
$$\frac{1}{2}MR_2^2\frac{a}{R_1+R_2} = R_1T - R_2f_s \quad\Rightarrow\quad f_s = \frac{R_1}{R_2}T - \frac{1}{2}M\frac{R_2}{R_1+R_2}a = \frac{1}{2}T - \frac{1}{3}Ma.$$

Quindi sostituendo prima nella seconda e poi nella prima delle ($*$) si ha

$$\frac{2}{3}Ma = T + \frac{1}{2}T - \frac{1}{3}Ma \quad\Rightarrow\quad Ma = \frac{3}{2}T \quad\rightarrow\quad T = \frac{2}{3}Ma,$$
$$ma = mg - \frac{2}{3}Ma \quad\Rightarrow\quad \left(m+\frac{2}{3}M\right)a = mg \quad\Rightarrow\quad a = \frac{3m}{3m+2M}\cdot g,$$

che ci porta allo stesso risultato!

PROBLEMA 3 Un recipiente cilindrico adiabatico è disposto orizzontalmente come indicato in figura; il recipiente ha sezione A e lunghezza D; il recipiente è diviso in due parti da un pistone (di spessore trascurabile) adiabatico e a tenuta, che può scorrere liberamente con attrito trascurabile. Nella parte destra del recipiente (dove è stato fatto il vuoto) è presente una molla di costante elastica $k = 1.56 \cdot 10^3\,\mathrm{N/cm}$, avente lunghezza a riposo pari ad D. Nella parte sinistra del recipiente vi è un gas ideale poliatomico alla temperatura iniziale $T_i = 300\,\mathrm{K}$. In tali condizioni la molla risulta compressa di $\Delta x_i = 20.0\,\mathrm{cm}$. Determinare:



A. la quantità di gas (in moli) presente nella parte sinistra del recipiente.

Successivamente, al gas viene fornita, lentamente, una quantità di calore Q tale da farlo espandere fino a che la molla risulta compressa di un $\Delta x_f = 50.0\,\mathrm{cm}$. In tale espansione determinare:

B. la temperatura finale del gas;

C. l'equazione (in termini di p e V o di V e T) seguita dal gas;

D. il lavoro L compiuto dal gas ed il calore Q ad esso fornito;

E. la variazione di entropia subita dal gas.

Soluzione

Nello stato iniziale abbiamo

$$p_i = \frac{k\Delta x_i}{A}; \qquad V_i = A\Delta x_i,$$

e quindi, usando l'equazione di stato dei gas ideali, si ricava

$$n = \frac{p_i V_i}{RT_i} = \frac{k\Delta x_i^2}{RT_i} = 2.50\,\mathrm{mol}.$$

Nello stato finale del gas è

$$p_f = \frac{k\Delta x_f}{A}; \qquad V_f = A\Delta x_f,$$

e quindi

$$T_f = \frac{p_f V_f}{nR} = \frac{k\Delta x_f^2}{nR} = 1880\,\mathrm{K}.$$

Confrontando i due stati si capisce che durante l'espansione varrà la seguente

$$k\Delta x^2 = nRT,$$

dalla quale, notando che $V = A\Delta x \propto \Delta x$, segue

$$\frac{V^2}{T} = \text{cost.} \qquad \text{o equivalentemente} \qquad \frac{V}{p} = \text{cost.}$$

Il lavoro fatto dal gas durante la sua espansione è uguale ed opposto al lavoro fatto dalla molla. Conseguentemente,

$$L = -L_{molla} = \Delta U_{el} = \frac{1}{2}k(\Delta x_f^2 - \Delta x_i^2) = 1.64 \cdot 10^4\,\mathrm{J}.$$

Facendo appello alla prima legge della termodinamica, per il calore fornito al gas, si ha

$$Q = \Delta E_{int} + L = nc_V(T_f - T_i) + \frac{1}{2}k(\Delta x_f^2 - \Delta x_i^2) = n3R(T_f - T_i) + \frac{1}{2}k(\Delta x_f^2 - \Delta x_i^2) = 1.15 \cdot 10^5\,\mathrm{J}.$$

Infine, la variazione di entropia del gas è

$$\Delta S = nc_V \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + nR\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) =$$
$$= 3nR \cdot 2 \cdot \ln\left(\frac{\Delta x_f}{\Delta x_i}\right) + nR\ln\left(\frac{\Delta x_f}{\Delta x_i}\right) = 7nR\ln\left(\frac{\Delta x_f}{\Delta x_i}\right) = 1.33 \cdot 10^2\,\mathrm{J/K}.$$
