Università degli Studi di Udine, Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Esami di FISICA I (9 CFU) e Fisica Generale 1 (12 CFU)
A.A. 2020/2021, Sessione di Giugno/Luglio, Primo Appello, 21 giugno 2021, Prova scritta

---

TESTI E SOLUZIONI DEI PROBLEMI

PROBLEMA 1

Un corpo di massa $m_1 = 1.00$ kg, inizialmente in quiete, è lasciato cadere da un'altezza h, con $h = 12.0$ m. Nello stesso istante in cui il corpo 1 inizia il suo moto, un secondo corpo, di massa $m_2 = 2.00$ kg, viene lanciato da terra con velocità v_{20}, lungo la stessa verticale. Date le condizioni, i due corpi si scontreranno; indichiamo con t_c e y_c l'istante e la quota a cui avviene la collisione.
Sapendo che l'urto tra i due corpi è completamente anelastico e che dopo l'urto il corpo unione dei due (di massa $m_1 + m_2$) raggiunge una quota massima pari ad h, determinare:

A. la velocità v_{20} con cui è stato lanciato il corpo 2;

B. l'istante t_c e la quota y_c a cui avviene l'urto;

C. l'energia persa nella collisione.

[Trattare i corpi come puntiformi, trascurare ogni attrito e supporre l'urto istantaneo.]

Soluzione Le equazioni orarie che regolano le velocità e la quota dei due corpi al passare del tempo sono le seguenti:

$$\begin{cases} v_1(t) = -gt; \\ y_1(t) = h - \dfrac{1}{2}gt^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} v_2(t) = v_{20} - gt; \\ y_2(t) = v_{20}t - \dfrac{1}{2}gt^2; \end{cases}$$

Per calcolare l'istante in cui i due corpi si scontrano, imponiamo $y_1(t) = y_2(t)$. Si ricava

$$y_1(t_c) = y_2(t_c) \quad \Rightarrow \quad h - \frac{1}{2}gt_c^2 = v_{20}t_c - \frac{1}{2}gt_c^2 \quad \Rightarrow \quad t_c = \frac{h}{v_{20}},$$

dalla quale otteniamo anche che la quota a cui avviene la collisione è

$$y_c = y_1(t_c) \equiv y_2(t_c) = h - \frac{1}{2}gt_c^2 = h - \frac{gh^2}{2v_{20}^2}.$$

Ora che conosciamo t_c possiamo dire che le velocità dei due corpi al momento della collisione sono rispettivamente

$$v_{1c} = v_1(t_c) = -gt_c = -\frac{gh}{v_{20}}; \qquad v_{2c} = v_2(t_c) = v_{20} - gt_c = v_{20} - \frac{gh}{v_{20}}.$$

Essendo l'urto istantaneo, le forze impulsive saranno molto più grandi delle forze esterne e quindi si potrà imporre la conservazione della quantità di moto. Perciò

$$m_1v_{1c} + m_2v_{2c} = (m_1 + m_2)V_c \quad \rightarrow \quad -\frac{m_1gh}{v_{20}} + m_2\left(v_{20} - \frac{gh}{v_{20}}\right) = (m_1 + m_2)V_c$$

dove con V_c si è indicata la velocità del corpo unione subito dopo l'urto. Dalla precedente si ricava

$$V_c = \frac{m_2}{m_1 + m_2}v_{20} - \frac{gh}{v_{20}}. \qquad (*)$$

D'altra parte, sappiamo che dopo l'urto il corpo unione raggiunge la quota massima h e quindi, dalla conservazione dell'energia meccanica segue che

$$(m_1 + m_2)gy_c + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_c^2 = (m_1 + m_2)gh \quad \Rightarrow \quad V_c^2 = 2g(h - y_c) = \frac{g^2h^2}{v_{20}^2} \quad \Rightarrow \quad V_c = \frac{gh}{v_{20}}.$$

Perciò eguagliando la ($*$) a quest'ultima, con qualche passaggio si ricava

$$\frac{m_2}{m_1+m_2}v_{20}-\frac{gh}{v_{20}}=\frac{gh}{v_{20}} \qquad \rightarrow \qquad \frac{m_2}{m_1+m_2}v_{20}=\frac{2gh}{v_{20}} \qquad \rightarrow \qquad v_{20}^2=\frac{2(m_1+m_2)gh}{m_2}$$

e quindi

$$v_{20}=\sqrt{\frac{2(m_1+m_2)gh}{m_2}}=18.8\,\mathrm{m/s}.$$

Conseguentemente, l'istante e la quota di collisione sono

$$t_c=\frac{h}{v_{20}}=\sqrt{\frac{m_2 h}{2(m_1+m_2)g}}=0.638\,\mathrm{s}; \qquad y_c=h-\frac{gh^2}{2v_{20}^2}=\left[1-\frac{m_2}{4(m_1+m_2)}\right]h=10.0\,\mathrm{m}.$$

Infine, l'energia persa nell'urto è

$$\begin{aligned}W&=\frac{1}{2}m_1v_{1c}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2c}^2-\frac{1}{2}(m_1+m_2)V_c^2=\\&=\frac{1}{2}m_1\frac{g^2h^2}{v_{20}^2}+\frac{1}{2}m_2\left(v_{20^2}+\frac{g^2h^2}{v_{20}^2}-2gh\right)-\frac{1}{2}(m_1+m_2)\frac{g^2h^2}{v_{20}^2}=\\&=\frac{1}{2}m_2v_{20}^2-m_2gh=\frac{1}{2}m_2\cdot\frac{2(m_1+m_2)gh}{m_2}-m_2gh=m_1gh=118\,\mathrm{J}.\end{aligned}$$

PROBLEMA 2

Si abbia (come schematizzato in figura) un cilindro omogeneo, di massa $M=20.0\,\mathrm{kg}$ e raggio esterno $R=30.0\,\mathrm{cm}$, al cui asse è applicata una coppia di momento $\vec{\tau}$ orientata in modo da (eventualmente) farlo ruotare in verso antiorario. Sul cilindro è anche avvolta una corda (inestensibile e di massa trascurabile) al cui altro capo è appeso un corpo di massa $m=10.0\,\mathrm{kg}$. Come schematizzato in figura, la corda è avvolta su una gola presente sulla superficie del cilindro avente raggio $r=20.0\,\mathrm{cm}$. La piccola puleggia indicata in figura non presenta attriti e ha massa trascurabile.

Supponendo che il cilindro non scivoli rispetto al piano su cui poggia, determinare:

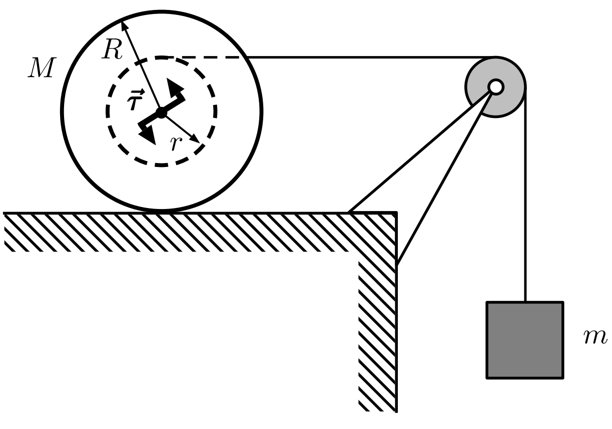
A. quanto deve valere il modulo di $\vec{\tau}$, τ_{eq}, affinché il sistema sia in equilibrio statico;

B. modulo, direzione e verso della forza di attrito statico $\vec{f}_s$ che agisce sul cilindro nelle condizioni di cui al punto **A.**;

C. l'accelerazione del centro di massa del cilindro, a_{cm}, nel caso in cui il modulo di $\vec{\tau}$ sia il doppio di quello calcolato in **A.**;

D. il minimo valore che deve avere il coefficiente di attrito statico tra cilindro e piano di appoggio affinchè l'assenza di slittamento (di cui al punto **C.**) sia possibile.

[Supporre che la corda non scivoli rispetto al cilindro; ai fini del calcolo del momento d'inerzia del cilindro, non tenere conto della gola.]



Soluzione
Detta T la tensione della corda ed f_s il modulo della forza di attrito statico, applichiamo la seconda legge della dinamica nelle forme lineare e angolare al corpo appeso e al cilindro allo scopo di scrivere le equazioni del moto per il sistema in esame. Supponendo che il momento $\vec{\tau}$ applicato al cilindro sia sufficiente a farlo ruotare in verso antiorario (e quindi rotolare verso sinistra), scegliamo degli assi paralleli e concordi alle direzioni di moto dei diversi corpi e a $\vec{\tau}$ rispettivamente; in tali condizioni è facile vedere che le equazioni del moto sono le seguenti

$$\begin{cases} ma = T - mg \\ Ma_{cm} = f_s - T \\ I_{cm}\alpha = \tau - rT - Rf_s \end{cases} \tag{$*$}$$

dove a e a_{cm} sono i moduli delle accelerazioni del corpo appeso (che sale) e del centro di massa del cilindro (che và verso sinistra), mentre α è l'accelerazione angolare del cilindro e $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$ è il suo momento d'inerzia rispetto all'asse per il suo centro di massa. Si noti che si è supposto che la forza di attrito statico $\vec{f}_s$ sia diretta (come è ovvio) verso sinistra.
In caso di equilibrio statico tutte le accelerazioni sono nulle e le equazioni si riducono alle seguenti

$$\begin{cases} 0 = T - mg \\ 0 = f_s - T \\ 0 = \tau - rT - Rf_s \end{cases}$$

dalle quali si ottiene velocemente

$$T = mg; \qquad f_s = T = mg = 98.1\,\mathrm{N}; \qquad \Rightarrow \qquad \tau = \tau_{eq} = rT + Rf_s = (r+R)mg = 49.1\,\mathrm{N}.$$

Se poi si pone $\tau = 2\tau_{eq}$, il sistema non sarà più in equilibrio e le accelerazioni non saranno più nulle; notiamo subito che tra le esse valgono le seguenti relazioni

$$\alpha = \frac{a}{R+r} = \frac{a_{cm}}{R} \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{R+r}{R}a_{cm} = \frac{5}{3}a_{cm}.$$

Tornando alle equazioni $(*)$, dalle prime due si ricavano le seguenti

$$T = m_g + ma = mg + \frac{5}{3}ma_{cm}; \qquad f_s = T + Ma_{cm} = \left(M + \frac{5}{3}m\right)a_{cm} + mg,$$

che inserite nella terza equazione delle $(*)$, con qualche passaggio, ci permettono di ricavare

$$\left[\frac{3}{2}MR + \frac{5}{3}(R+r)m\right]a_{cm} = \tau - (R+r)mg.$$

Perciò, tenendo presente che ora è $\tau = 2\tau_{eq} = 2(R+r)mg$, otteniamo

$$a_{cm} = \frac{6(R+r)m}{9MR + 10(R+r)m}g = \frac{30m}{27M + 50m}g = 2.83\,\mathrm{m/s^2}.$$

Conseguentemente, la forza di attrito statico è data da

$$f_s = T + Ma_{cm} = \left(M + \frac{5}{3}m\right)a_{cm} + mg = \frac{(57M + 100m)mg}{27M + 50m} = 202\,\mathrm{N}.$$

Pertanto, notando che la reazione normale agente sul cilindro è $N = Mg$ ed essendo

$$f_s \le f_{s,max} = \mu_s N = \mu_s Mg,$$

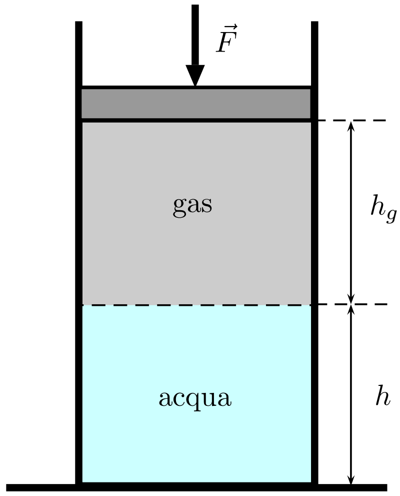
allora per il coefficiente di attrito statico deve valere la maggiorazione

$$\mu_s \ge \frac{f_s}{Mg} = 1.03.$$

PROBLEMA 3

In un recipiente cilindrico **con pareti adiabatiche** di area di base $A = 5000\ \text{cm}^2$, è contenuta dell'acqua fino ad una quota $h = 50.0$ cm (vedi figura). Il recipiente è chiuso superiormente con un pistone **adiabatico** a tenuta, di massa trascurabile, che può scorrere liberamente in verticale. Tra acqua e pistone sono presenti n moli di un gas ideale poliatomico. Acqua e gas possono scambiare calore liberamente. Come riportato in figura, sul pistone agisce costantemente una forza $\vec{\boldsymbol{F}}$ diretta verso il basso di modulo $F = 2.50 \cdot 10^4$ N.

Sapendo che nelle condizioni schematizzate in figura il sistema è in equilibrio meccanico e termico, che la temperatura di gas e acqua è pari a $T_0 = 310$ K e che il pistone è ad una distanza $h_g = 50.0$ cm dall'acqua, determinare (tenendo conto anche della pressione atmosferica):



A. il numero di moli n di gas presenti;

B. la velocità con cui zampillerebbe l'acqua nel caso in cui venisse praticato un forellino (di sezione molto inferiore ad A) alla base del recipiente.

Supporre poi che al sistema acqua+gas venga fornita (in qualche modo) lentamente una quantità di calore Q. Sapendo che alla fine la temperatura del sistema aumenta di un $\Delta T = 10°$C, determinare:

C. di quanto si solleva il pistone;

D. la quantità di calore Q fornito;

E. la variazione di entropia ΔS del sistema;

[Supporre trascurabili sia le variazioni del volume dell'acqua con la temperatura, sia la massa del gas. Per il calore specifico dell'acqua utilizzare il valore $c_a = 4.19 \cdot 10^3$ J/(kg · K).]

Soluzione Tenendo conto della pressione atmosferica p_0, la pressione a cui è sottoposto il gas tra pistone e acqua è pari a

$$p_1 = p_0 + \frac{F}{A}.$$

Notando che il volume occupato dal gas è $V_g = Ah_g$, per la legge dei gas ideali abbiamo

$$p_1 V_g = nRT_0 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{pV}{RT_0} = \frac{(Ap_0 + F)h_g}{RT_0} = 14.7 \text{ mol}.$$

Trascurando la massa del gas, la pressione p_1 è anche quella che agisce sulla superficie dell'acqua. Se si facesse un forellino alla base del recipiente, applicando l'equazione di Bernoulli tra la superficie dell'acqua e la sezione del forellino potremmo scrivere la seguente

$$p_1 + \rho g h = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 \quad \rightarrow \quad \frac{F}{A} + \rho g h = \frac{1}{2}\rho v_0^2$$

dove v_0 sono le rispettive velocità dell'acqua mentre $\rho = 1000\ \text{kg/m}^3$ è la massa volumica dell'acqua. Si noti che, essendo la sezione del forellino molto minore di A, la velocità dell'acqua alla quota h è stata trascurata. Quindi si ottiene

$$v_0 = \sqrt{2\left(gh + \frac{F}{\rho A}\right)} = 10.5 \text{ m/s}.$$

Fornendo (lentamente) la quantità di calore Q al sistema acqua+gas, le due sostanze rimarranno, passo passo, in mutuo equilibrio termico e tale calore si ripartirà tra esse proporzionalmente alle rispettive capacità termiche. Cioè il calore Q fornito al sistema potrà essere scritto come segue

$$Q = C\Delta T \quad \text{con} \quad C = C_a + C_g,$$

dove C_a e C_g sono le rispettive capacità termiche di acqua e gas (ovviamente C è la capacità termica complessiva). Per la capacità termica dell'acqua abbiamo

$$C_a = m_a c_a = \rho A h c_a = 1.047 \cdot 10^6 \text{ J/K}.$$

Invece, notando che mentre forniamo calore la pressione del gas è costante, allora per la sua capacità termica abbiamo

$$C_g = nc_p = n \cdot 4R = 4.89 \cdot 10^2 \text{ J/K}.$$

Come si vede, la capacità termica del gas è praticamente trascurabile rispetto a quella dell'acqua. Perció, possiamo scrivere

$$Q = C\Delta T \approx C_a \Delta T = \rho A h c_a \Delta T = 1.05 \cdot 10^7 \text{ J}.$$

Corrispondentemente, dato che il gas subisce un'espansione isobara dovrà essere

$$\frac{Ah_g}{T_0} = \frac{Ah'_g}{T_0 + \Delta T} \qquad \Rightarrow \qquad h'_g = \frac{T_0 + \Delta T}{T_0} h_g \qquad \Rightarrow \qquad \Delta h_g = h'_g - h_g = \frac{\Delta T}{T_0} h_g = 1.61 \, \text{cm}.$$

Il pistone si solleva di poco più di un centimetro.
Infine, la variazione di entropia del sistema sarà pari alla somma delle seguenti

$$\Delta S_a = m_a c_a \int_{T_0}^{T_0+\Delta T} \frac{\mathrm{d}T}{T} = \rho A h c_a \ln\left(\frac{T_0 + \Delta T}{T_0}\right) = 3.32 \cdot 10^4 \text{ J/K};$$
$$\Delta S_g = nc_p \int_{T_0}^{T_0+\Delta T} \frac{\mathrm{d}T}{T} = n \cdot 4R \ln\left(\frac{T_0 + \Delta T}{T_0}\right) = 15.5 \text{ J/K}.$$

Come si vede, anche in questo caso, il contributo dell'acqua è predominante e quindi possiamo concludere che la variazione di entropia del sistema è

$$\Delta S \approx \rho A h c_a \ln\left(\frac{T_0 + \Delta T}{T_0}\right) = 3.32 \cdot 10^4 \text{ J/K}.$$