Università degli Studi di Udine, Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Esami di FISICA I (9 CFU) e Fisica Generale 1 (12 CFU)
A.A. 2020/2021, Sessione di Settembre, Primo Appello, 1 Settembre 2021, Prova scritta

---

TESTI E SOLUZIONI DEI PROBLEMI

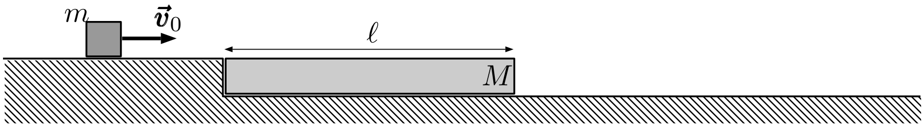
PROBLEMA 1 Un corpo di massa $m = 3.00\,\text{kg}$ viene lanciato orizzontalmente con una velocità $\vec{\boldsymbol{v}}_0$ su di un piano privo di attrito. Come si vede dalla figura, procedendo verso destra il corpo raggiunge una lastra (inizialmente in quiete) anch'essa libera di muoversi senza attrito. La lastra ha lunghezza $\ell = 2.00\,\text{m}$ e massa $M = 20.0\,\text{kg}$. Quando il corpo scivola sulla lastra risente di un attrito dinamico con $\mu_k = 0.500$.
Sapendo che dopo esservi salito il corpo raggiunge il centro della lastra (rimanendo in quiete rispetto ad essa), determinare:

A. il modulo di $\vec{\boldsymbol{v}}_0$;

B. la velocità finale del sistema lastra+corpo;

C. l'energia dissipata nell'intero processo.

[Trattare il corpo di massa m come puntiforme.]



Soluzione
Dal momento in cui il corpo di massa m sale sulla lastra (e fino a che scivola su di essa) esso sarà soggetto ad una forza di attrito $\vec{\boldsymbol{f}}_k$ diretta verso sinistra e di modulo $f_k = \mu_k mg$. Conseguentemente, il suo moto sarà uniformemente decelerato con accelerazione $a_m = -\mu_k g$. D'altra parte, per il principio di azione e reazione, sulla lastra agirà una forza uguale ed opposta e pertanto il suo moto sarà uniformemente accelerato con accelerazione $a_M = \frac{m}{M}\mu_k g$. Conseguentemente, le equazioni orarie delle velocità e delle posizioni di corpo e lastra saranno

$$\begin{cases} v_m(t) = v_0 + a_m t = v_0 - \mu_k g t; \\ v_M(t) = a_M t = \mu_k \dfrac{m}{M} g t; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_m(t) = v_0 t - \dfrac{1}{2}\mu_k g t^2; \\ x_M(t) = \dfrac{1}{2}\mu_k \dfrac{m}{M} g t^2; \end{cases}$$

Quando il corpo di massa m raggiungerà il centro della lastra e si fermerà rispetto ad essa, dovrà avere la sua stessa velocità; quindi dovrà essere

$$v_m(t^*) = v_M(t^*) \qquad \Rightarrow \qquad v_0 - \mu_k g t^* = \mu_k \frac{m}{M} g t^* \qquad \Rightarrow \qquad t^* = \frac{M v_0}{(m+M)\mu_k g}.$$

Si noti che lo spostamento del corpo di massa m rispetto alla lastra è dato da $x_m(t) - x_M(t)$ e che quindi, all'istante t^* dovrà essere pari a $\ell/2$. Perciò

$$x_m(t^*) - x_M(t^*) = \frac{\ell}{2} \qquad \Rightarrow \qquad v_0(t^*)^2 - \frac{1}{2}\mu_k g \left(\frac{m+M}{M}\right)(t^*)^2 = \frac{\ell}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{M v_0^2}{2\mu_k g(m+M)} = \frac{\ell}{2},$$

dalla quale ottiene

$$v_0 = \sqrt{\frac{\mu_k g \ell (m+M)}{M}} = 3.36\,\text{m/s}.$$

La velocità finale del sistema corpo+lastra è pari, indifferentemente, a $v_m(t^*)$ o $v_M(t^*)$. Cioè

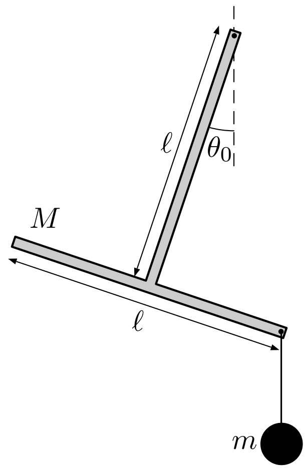
$$v_f = v_M(t^*) = \mu_k \frac{m}{M} g t^* = \frac{m v_0}{(m+M)} = \sqrt{\frac{\mu_k g \ell m^2}{M(m+M)}} = 0.438\,\text{m/s}.$$

Si noti che questo risultato si poteva ottenere anche invocando la conservazione della quantità di moto. Infatti, durante lo scivolamento del corpo sulla lastra, i due si scambiano solo forze interne al sistema corpo+lastra e quindi, essendo una la risultante delle forze esterne, la quantità di modo deve essere conservata!
L'energia dissipata nel processo è pari alla differenza tra l'energia cinetica iniziale del corpo di massa m e l'energia cinetica finale del sistema. Cioè

$$W = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(m+M)v_f^2 = \frac{1}{2}m\frac{\mu_k g\ell(m+M)}{M} - \frac{1}{2}(m+M)\frac{\mu_k g\ell m^2}{M(m+M)} = \frac{1}{2}\mu_k mg\ell = 14.7\,\mathrm{J},$$

come si vede anche pari al modulo del lavoro della forza di attrito!

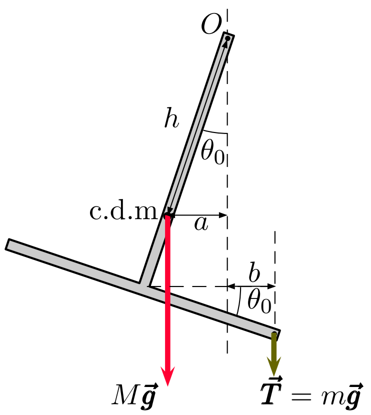
PROBLEMA 2 Si abbia (come schematizzato in figura) una T rovesciata di massa $M = 4m$. La T rovesciata è costituita da due barre sottili identiche di lunghezza $\ell = 100\,\mathrm{cm}$ e massa $2m$, con il centro della seconda saldata ad uno degli estremi della prima. Come mostra la figura, l'altro estremo della prima barra è imperniato ad una asse orizzontale intorno a cui la T può ruotare liberamente; inoltre, dalla figura si vede che ad uno degli estremi della seconda barra è appeso, tramite un filo di massa trascurabile, un corpo di massa m.



A. Pensando il sistema in equilibrio statico determinare l'angolo θ_0 (vedi figura) che la prima barra della T rovesciata forma con la verticale.

B. Supponendo poi che il filo che sostiene il corpo di massa m venga tagliato, si determini il periodo delle oscillazioni che la T rovesciata inizierebbe a fare (data la piccola ampiezza di queste, si considerino le oscillazioni come piccole).

Soluzione
Prima di tutto calcoliamo la posizione del centro di massa della T rovesciata. Dalla definizione di centro di massa è facile capire il centro di massa si trova lungo la prima barra ad una distanza dal suo estremo imperniato pari a



$$h = \frac{\frac{\ell}{2}\cdot 2m + \ell\cdot 2m}{4m} = \frac{3}{4}\ell = 75.0\,\mathrm{cm}.$$

Se il sistema è in equilibrio statico allora le risultanti delle forze e dei momenti agenti sul sistema debbono essere nulle. Tuttavia, nel nostro caso, dato che l'estremo della prima barra è fisso allora è sufficiente porre a zero il momento risultante.
Nella figura a fianco vediamo il diagramma delle forze che agiscono sulla T rovesciata che hanno momento rispetto al punto fisso O con indicati la posizione del centro di massa (c.d.m.) e i rispettivi bracci a e b delle forze $M\vec{g}$ e $\vec{T} = m\vec{g}$ (derivante dall'equilibrio statico del corpo di massa m). Pertanto, calcolando i momenti rispetto ad'O e notando che tutti sono perpendicolari al foglio, avremo

$$\tau = Mga - mgb = Mgh\sin\theta_0 - mg\left(\frac{\ell}{2}\cos\theta_0 - \ell\sin\theta_0\right) = 0 \quad\Rightarrow\quad 4mg\frac{3}{4}\ell\sin\theta_0 = \frac{\ell}{2}mg\left(\cos\theta_0 - 2\sin\theta_0\right).$$

Da questa otteniamo

$$6\sin\theta_0 = \cos\theta_0 - 2\sin\theta_0 \quad\Rightarrow\quad 8\sin\theta_0 = \cos\theta_0 \quad\Rightarrow\quad \tan\theta_0 = \frac{1}{8} \quad\Rightarrow\quad \theta_0 = \arctan\left(\frac{1}{8}\right) = 7.12^\circ.$$

Dopo che il filo viene tagliato la T rovesciata non è più in equilibrio e prende ad oscillare con oscillazioni di ampiezza θ_0. Applicando la seconda legge della dinamica in forma angolare rispetto al punto fisso O, per un angolo generico θ possiamo scrivere

$$I\alpha = -Mgh\sin\theta \qquad \Rightarrow \qquad I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -3mg\ell\sin\theta,$$

dove I è il momento d'inerzia della T rispetto all'asse per O. Quindi, se supponiamo che l'angolo θ sia piccolo, possiamo fare l'approssimazione $\sin\theta \approx \theta$ e l'equazione del moto assume la forma

$$I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -3mg\ell\cdot\theta \qquad \rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\left(\frac{3mg\ell}{I}\right)\theta,$$

tipica delle oscillazioni armoniche.
Conseguentemente, pulsazione e periodo di tali oscillazioni sono

$$\omega = \sqrt{\frac{3mg\ell}{I}}; \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{3mg\ell}}.$$

Facendo anche uso del teorema degli assi paralleli per il momento d'inerzia abbiamo

$$I = \frac{1}{3}2m\ell^2 + \frac{1}{12}2m\ell^2 + 2m\ell^2 = 2m\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+1\right)\ell^2 = \frac{17}{6}m\ell^2,$$

e quindi

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{17\ell}{18g}} = 1.95\,\mathrm{s}.$$

PROBLEMA 3 Un recipiente cilindrico **con pareti adiabatiche** di sezione $A = 100\ \mathrm{cm}^2$ è disposto verticalmente. Come mostrato, nella parte inferiore del recipiente sono presenti $n = 0.200\,\mathrm{mol}$ di un gas ideale biatomico alla temperatura $T_i = 100\,\mathrm{K}$; lo scomparto centrale ha un'altezza $h_a = 100\,\mathrm{cm}$ e contiene acqua. I pistoni a tenuta che separano le diverse sostanze sono adiabatici, di massa e spessore trascurabili e possono scorrere senza attrito. La parte superiore del recipiente è aperta (e quindi esposta alla pressione atmosferica), ma è rientrante in modo che il pistone superiore salendo non possa uscire.
Nella configurazione schematizzata il sistema è all'equilibrio termico e meccanico e il pistone superiore si trova a $h_0 = 30.0\,\mathrm{cm}$ dalla sommità del recipiente. In tali condizioni si determini:

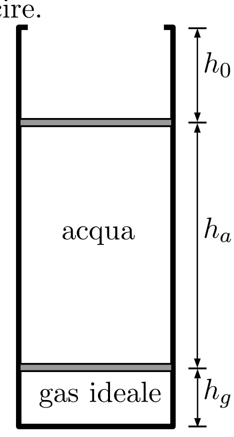
A. l'altezza dello scomparto contenente il gas ideale.

Successivamente, al gas viene fornito molto lentamente una quantità complessiva di calore Q che fa espandere il gas (facendo sollevare i pistoni). Sapendo che la temperatura finale raggiunta dal gas è $T_f = 500\,\mathrm{K}$,

B. specificare il tipo di trasformazioni che subisce il gas;

C. calcolare la quantità di calore Q fornita e la pressione finale dell'acqua a livello del pistone superiore;

D. determinare la variazione di entropia ΔS subita dal gas.



Soluzione
Dato che il recipiente è aperto superiormente il gas ideale sarà soggetto ad una pressione pari a

$$p_i = p_0 + \rho_a g h_a = 1.11\cdot 10^5\ \mathrm{Pa} = 1.10\,\mathrm{atm}.$$

dove $p_0 = 1.0\,\mathrm{atm} = 1.013\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$ è la pressione atmosferica e $\rho_a = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$ è la massa volumica dell'acqua.
Conseguentemente, il volume e l'altezza dello scomparto occupato dal gas sono

$$V_i = \frac{nRT_i}{p_i} \qquad \Rightarrow \qquad h_g = \frac{V_i}{A} = \frac{nRT_i}{Ap_i} = 15.0\,\mathrm{cm}.$$

Fornendo calore il gas si espanderà: fino a che il pistone superiore potrà salire liberamente il gas seguirà un'espansione isobara alla pressione p_1; successivamente, il gas seguirà un'isocora con un volume pari a $V_f = A(h_g + h_0)$.
Alla fine dell'espansione isobara la temperatura del gas sarà

$$\frac{T_i}{V_i} = \frac{T_1}{V_f} \qquad \Rightarrow \qquad T_1 = \frac{V_f}{V_i} T_i = \frac{(h_g + h_0)}{h_g} T_i = 300\,\mathrm{K}.$$

Perciò, il calore fornito al gas in tale trasformazione è

$$Q_1 = nc_p(T_1 - T_i) = n\frac{7}{2}R(T_1 - T_i) = 1.16 \cdot 10^3\ \mathrm{J}.$$

Nella fase successiva il gas si scalda a volume costante e quindi, dovendo arrivare a T_f, la quantità di calore da fornire è

$$Q_2 = nc_V(T_f - T_1) = n\frac{5}{2}R(T_f - T_1) = 8.31 \cdot 10^2\ \mathrm{J}.$$

Quindi il calore totale fornito al gas è

$$Q = Q_1 + Q_2 = 1.99 \cdot 10^3\ \mathrm{J}.$$

La pressione finale del gas è

$$p_f = \frac{nRT_f}{V_f} = \frac{nRT_f}{A(h_g + h_0)} = 1.84 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa} = 1.82\,\mathrm{atm}.$$

Perciò, per la legge di Stevino, la pressione alla sommità della colonna di acqua è

$$p_a = p_f - \rho_a g h_a = 1.75 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa} = 1.73\,\mathrm{atm}.$$

Infine, la variazione di entropia subita dal gas è

$$\Delta S = nc_V \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + nR\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = nR\left[\frac{5}{2}\ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + \ln\left(\frac{h_g + h_0}{h_g}\right)\right] = 8.52\,\mathrm{J/K}.$$
