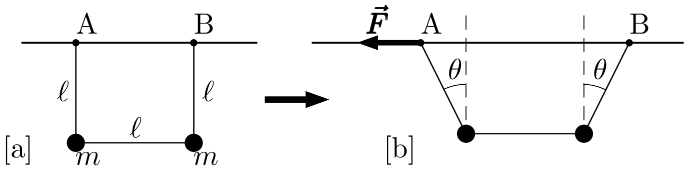
TESTI E SOLUZIONI DEI PROBLEMI

PROBLEMA 1 (8 punti) Due sferette identiche di massa di massa $m = 1.00\,\mathrm{kg}$ sono sospese ad un cavo orizzontale tramite tre cordicelle identiche, di lunghezza $\ell = 30.0\,\mathrm{cm}$; le cordicelle sono inestensibili e di massa trascurabile. Il punto A a cui è agganciata la cordicella di sinistra può scorrere liberamente senza attrito; il punto B a cui è agganciata la cordicella sinistra è fisso. Inizialmente (vedi figura [a]) i punti A e B sono a distanza ℓ. Come indicato nella figura [b], supporre che al punto A venga applicata una forza $\vec{\boldsymbol{F}}$ tangente al cavo orizzontale e diretta verso sinistra. A causa di tale forza il punto A si sposterà verso sinistra e, a seconda del suo modulo, il sistema assumerà una configurazione di equilibrio caratterizzata da un'opportuno angolo θ (vedi figura [b]). Determinare:



A. la formula che esprime l'angolo θ in funzione del modulo di $\vec{\boldsymbol{F}}$;

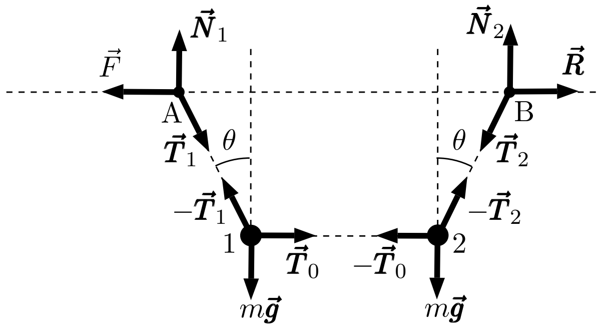
B. le analoghe formule per le tensioni delle 3 cordicelle.

Supporre poi che, partendo dalla configurazione [a], la forza $\vec{\boldsymbol{F}}$ applicata ad A venga via via aumentata (iniziando da modulo nullo); il modulo di $\vec{\boldsymbol{F}}$ viene variato molto lentamente in modo che il sistema rimanga costantemente in equilibrio come supposto nei punti **A.** e **B.** Sapendo che le cordicelle sopportano una tensione massima $T_{max} = 100.0\,\mathrm{N}$ (cioè, se la tensione di una cordicella supera tale valore, la cordicella si spezza), determinare:

C. l'angolo θ_{max} a cui una delle cordicelle si spezza, specificando quale;

D. il lavoro che la forza $\vec{\boldsymbol{F}}$ ha compiuto fino a quel momento.

Soluzione Se il sistema è in equilibrio statico allora la risultante delle forze che agiscono sui punti A e sulle sferette devono essere nulle. Nella figura a fianco si sono indicate tutte le forze presenti nel sistema (per completezza si sono indicate anche le forze agenti sul punto B che in ogni caso, come detto nel testo, è fisso.



Con $\vec{\boldsymbol{T}}_0$, $\vec{\boldsymbol{T}}_1$ e $\vec{\boldsymbol{T}}_2$ (e i rispettivi opposti) sono indicate le forze che le varie cordicelle esercitano (a causa della loro tensione) sulle sferette 1 e 2 e sui punti A e B; $\vec{\boldsymbol{N}}_1$ e $\vec{\boldsymbol{N}}_2$ sono le forze verticali che il cavo dovrà produrre per sostenere il tutto; $\vec{\boldsymbol{R}}$ è la reazione del cavo per mantenere fermo il punto B. Decomponendo le forze lungo gli assi x (orizzontale verso destra) e y (verticale verso l'alto) l'equilibrio statico nei punti A, 1, 2 e B comporta le seguenti equazioni:

$$\mathrm{A}\begin{cases} T_1\sin\theta - F = 0 \\ N_1 - T_1\cos\theta = 0 \end{cases} \qquad 1\begin{cases} T_0 - T_1\sin\theta = 0 \\ T_1\cos\theta - mg = 0 \end{cases} \qquad 2\begin{cases} T_2\sin\theta - T_0 = 0 \\ T_2\cos\theta - mg = 0 \end{cases} \qquad \mathrm{B}\begin{cases} R - T_2\sin\theta = 0 \\ N_2 - T_2\cos\theta = 0 \end{cases}$$

dove ora T_0, T_1, T_2, N_1, N_2, R ed F sono i moduli delle rispettive forze. Dalle relazioni per i punti 1 e 2 si ricava

$$T_1 = T_2 = \frac{mg}{\cos\theta}; \qquad T_0 = T_1\sin\theta \equiv T_2\sin\theta = mg\tan\theta;$$

e quindi inserendo queste nelle relazioni per i punti A e B si ottiene

$$N_1 = N_2 = mg; \qquad F = R = mg\tan\theta.$$

Le relazioni ottenute mostrano che (come si poteva sospettare) la geometria simmetrica del sistema porta a relazioni simmetriche anche per le forze.
Quanto richiesto in **A.** e **B.** è dato dalle seguenti

$$\theta(F) = \arctan\left(\frac{F}{mg}\right); \qquad T_1 = T_2 = \frac{mg}{\cos\theta}; \qquad T_0 = mg\tan\theta.$$

Da queste relazioni si vede immediatamente che, essendo $T_0 = T_1 \sin\theta$, è sempre $T_1 = T_2 > T_0$ (... anche se di poco): pertanto, saranno le cordicelle agganciate ai punti A e B a spezzarzi per prime. Questo avverrà quando

$$T_1 = T_{max} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{mg}{\cos\theta_{max}} = T_{max} \qquad \rightarrow \qquad \theta_{max} = \arccos\left(\frac{mg}{T_{max}}\right) = 84.37°.$$

Il lavoro L_F che compie la forza $\vec{\boldsymbol{F}}$, può essere ottenuto seguendo due vie. Da una parte, dato che si è supposto che sebbene il punto A si sposti, tutto avviene in modo ***quasi statico***, allora il sistema non acquisisce nessuna energia cinetica; quindi, dalla conservazione dell'energia possiamo scrivere

$$\Delta E_{mecc} = L_F \qquad \Rightarrow \qquad \Delta U = L_F.$$

dove ΔU è la variazione dell'energia potenziale gravitazionale dovuto all'innalzamento delle due sferette pari a

$$\Delta h_{max} = \ell(1-\cos\theta_{max}) = \ell\left(1-\frac{mg}{T_{max}}\right).$$

Quindi

$$L_F = \Delta U = 2mg\Delta h_{max} = 2mg\ell\left(1-\frac{mg}{T_{max}}\right) = 35.4\,\mathrm{J}.$$

In alternativa, dalla definizione di lavoro, L_F è anche pari al seguente integrale

$$L_F = \int_i^f F\mathrm{d}s,$$

da calcolare lungo lo spostamento del punto A a cui è applicata la forza $\vec{\boldsymbol{F}}$. Indicando con $s(\theta)$ la lunghezza del tratto percorso da A tra la posizione iniziale (angolo $\theta = 0$ figura [a]) e la posizione per un θ generico (figura [b]), si vede facilmente che è

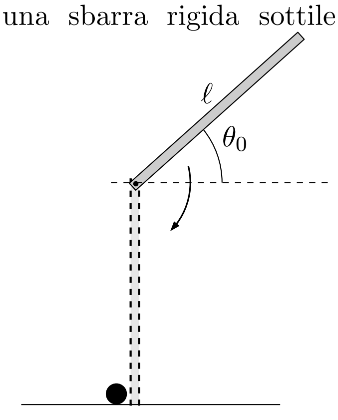
$$s(\theta) = 2\ell\sin\theta \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}s = 2\ell\cos\theta\mathrm{d}\theta,$$

e quindi, sviluppando l'integrale, si ottiene

$$\begin{aligned} L_F = \int_i^f F\mathrm{d}s = 2mg\ell\int_0^{\theta_{max}} \tan\theta\cdot\cos\theta\mathrm{d}\theta = 2mg\ell\int_0^{\theta_{max}}\sin\theta\mathrm{d}\theta = \\ = 2mg\ell\left[-\cos\theta\right]_0^{\theta_{max}} = 2mg\ell\left(1-\cos\theta_{max}\right) = 2mg\ell\left(1-\frac{mg}{T_{max}}\right), \end{aligned}$$

identico a quanto ottenuto sopra!

PROBLEMA 2 (8 punti) Come schematizzato in figura, si abbia una sbarra rigida sottile, di lunghezza $\ell = 2.00\,\mathrm{m}$ e massa m, disposta in un piano verticale. La sbarra può ruotare liberamente intorno ad un perno orizzontale passante per un suo estremo. La sbarra viene liberata (da ferma) quando forma un angolo iniziale θ_0 con l'orizzontale (vedi figura); quando la sbarra raggiunge la verticale il suo estremo inferiore **urta elasticamente** un corpo di massa $m/2$ posto in quiete in quella posizione.
Trascurando ogni forma di attrito e sapendo che dopo l'urto il corpo puntiforme parte verso sinistra con una velocità $v_f = 6.00\,\mathrm{m/s}$, determinare:



A. l'angolo θ_0 da cui è stata lasciata andare la sbarra;
B. l'angolo massimo (dalla verticale) che raggiunge la sbarra dopo l'urto.

Soluzione L'elasticità dell'urto tra sbarra e corpo poggiato sul piano impone la conservazione dell'energia cinetica. Invece, essendo la sbarra vincolata ad un'estremo, all'atto dell'urto il vincolo produrrà delle forze impulsive atte a non permettere, appunto, che quella parte della sbarra non si possa muovere: per il sistema sbarra+corpo tali forze devono essere viste come forze esterne e quindi, data la validità della 2^a legge della dinamica in forma lineare, la sua quantità di moto non potrà conservarsi! Tuttavia, sfruttando il fatto che tali forze sono localizzate sul vincolo, l'applicazione della 2^a legge della dinamica in forma angolare all'asse per il vincolo stesso, ci permette di imporre la conservazione del momento angolare del sistema (dato che così facendo si annulla il braccio delle forze impulsive).
Pertanto, confrontando le energie cinetiche e i momenti angolari, subito prima e subito dopo l'urto, potremo scrivere le seguenti

$$\begin{cases} \frac{1}{2}I\omega_1^2 = \frac{1}{2}I\omega_2^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{2}v_f^2 \\ \\ I\omega_1 = I\omega_2 + \frac{m}{2}\ell v_f \end{cases}$$

dove $I = \frac{1}{3}m\ell^2$ è il momento d'inerzia della sbarra rispetto al suo estremo (vincolato), mentre ω_1 e ω_1 sono le sue velocità angolari subito prima e subito dopo l'urto. Inserendo l'espressione di I e facendo qualche semplificazione otteniamo le seguenti

$$\begin{cases} 2\ell^2(\omega_1^2 - \omega_2^2) = 3v_f^2 \\ \\ 2\ell(\omega_1 - \omega_2) = 3v_f \end{cases}$$

dalle quali, dividendo membro a membro (si ricordi che è $\omega_1^2 - \omega_2^2 = (\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 + \omega_2)$) si ottiene

$$\ell(\omega_1 + \omega_2) = v_f \qquad \Rightarrow \qquad \omega_2 = \frac{v_f}{\ell} - \omega_1.$$

Inserendo quest'ultima nella precedenti si arriva velocemente alle seguenti soluzioni

$$\omega_1 = \frac{5}{4}\frac{v_f}{\ell}; \qquad \omega_2 = -\frac{1}{4}\frac{v_f}{\ell}.$$

Si noti che il valore negativo di ω_2 significa che dopo l'urto la sbarra prende a ruotare all'indietro!
Nella rotazione che porta la sbarra ad urtare con il corpo vale (data l'assenza di attriti) la conservazione dell'energia meccanica. Quindi, si può scrivere la seguente

$$mg\frac{\ell}{2}(1 + \sin\theta_0) = \frac{1}{2}I\omega_1^2 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_1^2 = 3\frac{g}{\ell}(1 + \sin\theta_0).$$

Confrontando questa con il valore di ω_1 ottenuto in precedenza è immediato ricavare

$$\omega_1^2 = 3\frac{g}{\ell}(1 + \sin\theta_0) = \frac{25}{16}\frac{v_f^2}{\ell^2} \qquad \rightarrow \qquad \sin\theta_0 = \frac{25}{48}\frac{v_f^2}{g\ell} - 1,$$

e quindi

$$\theta_0 = \arcsin\left(\frac{25}{48}\frac{v_f^2}{g\ell} - 1\right) = -2.54°$$

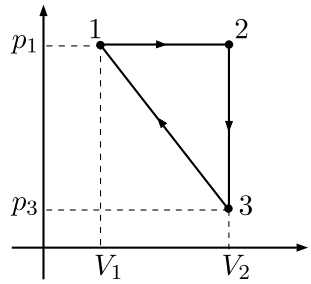
il cui valore negativo ci dice che all'inizio la sbarra era di poco inclinata verso il basso.
Anche nella rotazione all'indietro della sbarra dopo l'urto vale la conservazione dll'energia meccanica. Quindi

$$mg\frac{\ell}{2}(1 - \cos\alpha) = \frac{1}{2}I\omega_2^2 \qquad \Rightarrow \qquad \ell\omega_2^2 = 3g(1 - \cos\alpha),$$

dove ora α è l'angolo massimo raggiunto dalla sbarra rispetto alla verticale. Si ottiene immediatamente

$$\cos\alpha = 1 - \frac{1}{48}\frac{v_f^2}{g\ell} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \arccos\left(1 - \frac{1}{48}\frac{v_f^2}{g\ell}\right) = 15.9°.$$

PROBLEMA 3 (8 punti) Un quantità $n = 1.50\,\mathrm{mol}$ di un gas ideale **biatomico** segue il ciclo reversibile schematizzato in figura costituito dalle seguenti trasformazioni: $1 \to 2$ isobara; $2 \to 3$ isocora; $3 \to 1$ trasformazione corrispondente al segmento rettilineo che unisce gli stati 3 e 1. Pressione e temperatura dello stato 1 sono $p_1 = 3.00\,\mathrm{atm}$ e $T_1 = 200\,\mathrm{K}$; per i volumi e le pressioni degli altri stati è $V_2 = V_3 = 2V_1$ e $p_3 = p_1/3$.



Determinare:

A. il volume occupato dal gas nello stato 1 e le sue temperature negli stati 2 e 3;
B. il lavoro compiuto dal gas nell'intero ciclo;
C. la variazione di entropia subita dallo stesso nella trasformazione $3 \to 1$.
D. la massima temperatura raggiunta dal gas sempre lungo la trasformazione $3 \to 1$.

Soluzione Prima di tutto calcoliamo le quantità richieste nella domanda **A.**

$$V_1 = \frac{nRT_1}{p_1} = 8.21 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 = 8.21\,\mathrm{dm}^3.$$

$$T_2 = \frac{p_2V_2}{nR} = \frac{p_1 2V_1}{nR} = 2T_1 = 400\,\mathrm{K}; \qquad T_3 = \frac{p_3V_3}{nR} = \frac{p_1 2V_1}{3nR} = \frac{2}{3}T_1 = 133\,\mathrm{K}.$$

Per il lavoro compiuto nel ciclo possiamo procedere per via grafica. Si ha

$$L = \frac{1}{2}(V_2 - V_1)(p_1 - p_3) = \frac{1}{2}V_1\frac{2}{3}p_1 = \frac{1}{3}p_1V_1 = \frac{1}{3}nRT_1 = 8.31 \cdot 10^2\,\mathrm{J}.$$

La variazione di entropia nella trasformazione $3 \to 1$ è

$$\Delta S_{3,1} = nc_V \ln\left(\frac{T_1}{T_3}\right) + nR\ln\left(\frac{V_1}{V_3}\right) = n\frac{5}{2}R\ln\left(\frac{3}{2}\right) + nR\ln\left(\frac{1}{2}\right) = nR\left[\frac{5}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right] = 4.00\,\mathrm{J/K}.$$

La trasformazione $3 \to 1$ è del tipo $p(V) = a + bV$ dove possiamo calcolare le costanti a e b imponendo le seguenti:

$$\begin{cases} a + bV_3 = p_3 \\ a + bV_1 = p_1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} b &= \frac{p_1 - p_3}{V_1 - V_3} = -\frac{2p_1}{3V_1} = -2.468 \cdot 10^7\,\mathrm{Pa/m^3}; \\ a &= p_3 - bV_3 = \frac{5}{3}p_1 = 5.06 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} = 5.00\,\mathrm{atm}. \end{aligned}$$

Conseguentemente, dall'equazione di stato dei gas ideali, ricaviamo che lungo la $3 \to 1$ la temperatura varia secondo la seguente

$$T(V) = \frac{p(V) \cdot V}{nR} = \frac{1}{nR}(a + bV)V.$$

Per il calcolo della temperatura massima, consideriamo la derivata di quest'ultima rispetto al volume e ne troviamo lo zero. Così

$$\frac{\mathrm{d}T(V)}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{nR}(a + 2bV) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V = V^* = -\frac{a}{2b} = \frac{5}{4}V_1,$$

che come si vede è compreso tra V_1 e V_3. Pertanto, la corrispondente temperatura, che sarà la massima nella trasformazione $3 \to 1$, è

$$T(V^*) = \frac{1}{nR}(a + bV^*)V^* = \frac{1}{nR}\left(\frac{5}{3}p_1 - \frac{2}{3}\frac{p_1}{V_1}\frac{5}{4}V_1\right)\frac{5}{4}V_1 = \frac{1}{nR}\frac{25}{24}p_1V_1 = \frac{25}{24}T_1 = 208\,\mathrm{K}.$$
