Università degli Studi di Udine, Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Esami di FISICA I (9 CFU) e Fisica Generale 1 (12 CFU)
A.A. 2021/2022, <u>Sessione di Gennaio/Febbraio</u>, Primo Appello, 18 Gennaio 2022, Prova scritta

---

TESTI E SOLUZIONI DEI PROBLEMI

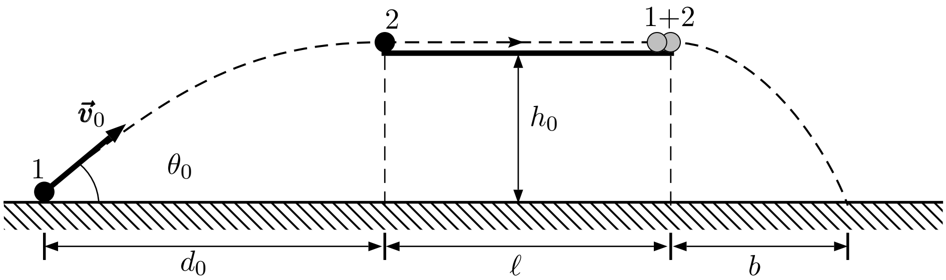
PROBLEMA 1 Il corpo puntiforme 1 (vedi figura), di massa $m_1 = 300\,\mathrm{g}$, viene lanciato dal pavimento (con una velocità $\vec{\boldsymbol{v}}_0$ che forma un angolo θ_0 con l'orizzontale) verso un ripiano di lunghezza $\ell = 100\,\mathrm{cm}$ posto (vedi figura) ad una distanza $d_0 = 150\,\mathrm{cm}$ e ad una quota $h_0 = 43.3\,\mathrm{cm}$. Sul bordo del ripiano è poggiato, in quiete, il corpo puntiforme 2 di massa $m_2 = 500\,\mathrm{g}$.
Sapendo che il corpo 1 arriva ad urtare il 2 **orizzontalmente**, determinare:

A. il modulo della velocità v_0 e l'angolo di lancio θ_0.

L'urto tra 1 e 2 è **completamente anelastico** e dopo l'urto il corpo unione 1+2 scivola sul ripiano che presenta attrito caratterizzato da un coefficiente di attrito dinamico $\mu_k = 0.150$. Determinare:

B. la distanza dal bordo destro del ripiano, b, a cui il corpo unione 1+2 raggiunge il pavimento;

C. l'entità dell'energia dissipata complessivamente in tutto il processo.



Soluzione Nel volo del corpo 1 dal pavimento al ripiano devono valere le seguenti relazioni

$$\begin{cases} v_0 \cos\theta_0 \cdot t^* = d_0 \\ v_0 \sin\theta_0 \cdot t^* - \dfrac{1}{2} g (t^*)^2 = h_0 \\ v_0 \sin\theta_0 - g t^* = 0 \end{cases}$$

dove t^* è il tempo di volo che dalla terza equazione può essere espresso come segue

$$t^* = \frac{v_0 \sin\theta_0}{g}.$$

Inserendo questa nelle prime due equazioni si ottengono le seguenti

$$v_0^2 \cos\theta_0 \sin\theta_0 = g d_0; \qquad v_0^2 \sin^2\theta_0 = 2 g h_0,$$

dalle quali (dividendole membro a membro) si ricava facilmente

$$\tan\theta_0 = \frac{2h_0}{d_0} \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = \arctan\left(\frac{2h_0}{d_0}\right) = 30.0°;$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gh_0}{\sin^2\theta_0}} = \sqrt{8gh_0} = 5.83\,\mathrm{m/s}.$$

La velocità con cui il corpo 1 arriva ad impattare sul corpo 2 è

$$v_1 = v_0 \cos\theta_0 = 5.05\,\mathrm{m/s}.$$

Essendo l'urto perfettamente anelastico utilizziamo dalla conservazione della quantità di moto otteniamo

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_{12} \qquad \Rightarrow \qquad v_{12} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = 1.89\,\mathrm{m/s}.$$

Il corpo 1+2 scivola lungo il ripiano e a causa dell'attrito riduce la sua velocità. Applicando la conservazione dell'energia[1] si ricava

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{12,f}^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{12}^2 = -\mu_k (m_1 + m_2) g \ell \qquad \Rightarrow \qquad v_{12,f} = \sqrt{v_{12}^2 - 2\mu_k g \ell} = 0.793\,\mathrm{m/s},$$

dove $v_{12,f}$ è la velocità del corpo 1+2 alla fine del ripiano.
Conseguentemente, dato che il tempo di caduta dal ripiano è

$$t^{**} = \sqrt{\frac{2h_0}{g}},$$

la distanza b sarà

$$b = v_{12,f} t^{**} = v_{12,f} \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = 23.6\,\mathrm{cm}.$$

D'altra parte il modulo della velocità (comprensiva delle sue componenti orizzontale e verticale) con cui il corpo 1+2 raggiunge il pavimento è

$$(m_1 + m_2) g h_0 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{12,f}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2 \qquad \Rightarrow \qquad v_f = \sqrt{2 g h_0 + v_{12,f}^2} = 3.02\,\mathrm{m/s}.$$

Nell'intero processo l'energia viene dissipata nell'urto (essendo anelastico) e nello scivolamento lungo il ripiano: quindi, si potrebbe valutare calcolando la riduzione di energia cinetica nell'urto e il lavoro della forza di attrito. Tuttavia, dato che l'energia nel suo complesso si conserva, come anche fatto in precedenza, calcolando la variazione di energia meccanica tra gli istanti iniziale e finale dell'intero processo si ottiene la stessa quantità. Pertanto abbiamo

$$W = E_{mecc,i} - E_{mecc,f} = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 + m_2 g h_0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2 = 3.57\,\mathrm{J}.$$

---

[1] Si può applicare indifferentemente "la variazione dell'energia meccanica è pari al lavoro delle forze non conservative" o il teorema dell'energia cinetica

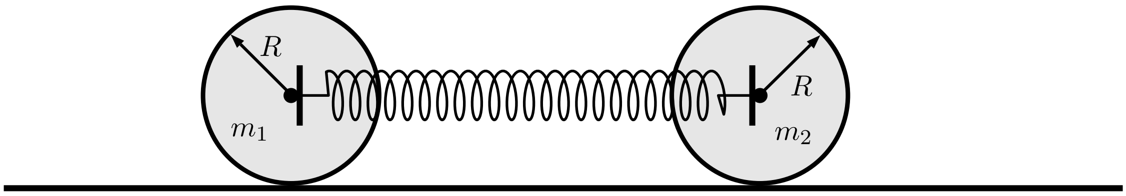
PROBLEMA 2 Due sfere omogenee aventi lo stesso raggio R e masse $m_1 = 4.00\,\mathrm{kg}$ e $m_2 = 7.00\,\mathrm{kg}$ rispettivamente sono poste su un piano orizzontale. Tra esse (come schematizzato in figura) è inserita una molla (ideale e di massa trascurabile) di costante elastica $k = 100\,\mathrm{N/m}$ i cui respingenti agiscono (vedi figura) sui centri di massa delle due sfere. Inizialmente le due sfere sono mantenute in quiete ad una distanza tale da rendere la molla compressa di un $\Delta x_0 = 15.0\,\mathrm{cm}$.
Ad un certo istante le sfere vengono lasciate libere dando così modo alla molla di estendersi mettendole in movimento. Sapendo che durante il loro moto **entrambe le sfere** si muovono di moto di puro rotolamento:

A. (giustificando la risposta) specificare se durante l'estensione della molla la quantità di moto dell'intero sistema si conserva o meno;

B. calcolare le accelerazioni iniziali con cui le due sfere iniziano a muoversi;

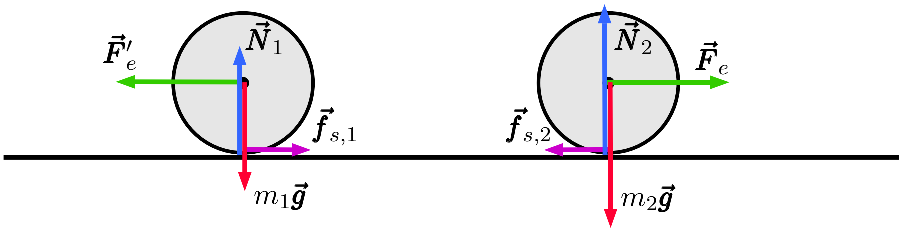
C. determinare le velocità che i centri di massa delle due sfere raggiungono alla fine dell'estensione della molla.

[*I respingenti della molla spingono sui centri di massa delle sfere fino a quando la lolla raggiunge la sua lunghezza di riposo; dopo di ciò, la spinta viene a cessare. Il momento d'inerzia di una sfera omogenea di raggio R e massa m rispetto ad un'asse passante per il suo centro è $I_{cm} = \frac{2}{5}mR^2$.*]



Soluzione

Nella figura che segue sono indicate tutte le forze che agiscono sui due corpi durante l'estensione della molla. Le due forze $\vec{F}_e$ e $\vec{F}'_e$ sono le due forze prodotte dall'azione della molla; ovviamente hanno lo stesso modulo che indicheremo con F_e.[2] Le forze $\vec{f}_{s,1}$ e $\vec{f}_{s,2}$ sono le forze di attrito statico necessarie affinché le due sfere non slittino.



Dal diagramma delle forze si comprende che, essendo le due forze elastiche sempre uguali ed opposte, la risultante delle forze esterne che agiscono sul sistema costituito dalle due sfere sarà nulla se e solo se le due forze di attrito statico avranno lo stesso modulo. Solo in questo caso la quantità di moto del sistema si protrà conservare.
Quindi andiamo ad impostare le equazioni del moto per le due sfere e cerchiamo di estrarre il valore dei moduli delle forze di attrito statico. Consideriamo un'asse x orizzontale verso destra e prendiamo come positivi i momenti che fanno ruotare in verso orario: applicando la 2^a legge della dinamica nelle forme lineare e angolare per le due sfere possiamo scrivere

$$\begin{cases} m_1 a_{cm,1} = -F_e + f_{s,1} \\ I_{cm,1}\alpha_1 = -Rf_{s,1} \end{cases} \qquad \begin{cases} m_2 a_{cm,2} = F_e - f_{s,2} \\ I_{cm,2}\alpha_2 = Rf_{s,2} \end{cases}$$

dove F_e dalle quali, tenendo presente che è $\alpha_1 = a_{cm,1}/R$ e $\alpha_2 = a_{cm,2}/R$, si ottiene

$$f_{s,1} = -\frac{I_{cm,1}}{R^2}a_{cm,1}; \qquad f_{s,2} = \frac{I_{cm,2}}{R^2}a_{cm,2},$$
$$\left(m_1 + \frac{I_{cm,1}}{R^2}\right)a_{cm,1} = -F_e; \qquad \left(m_2 + \frac{I_{cm,2}}{R^2}\right)a_{cm,2} = F_e,$$

[2] Ovviamente è $F_e = k\Delta x$, dove Δx è la compressione della molla; nell'istante di rilascio dei corpi è $\Delta x = \Delta x_0$.

dalle quali (inserendo anche l'espressione di $I_{cm,1}$ e $I_{cm,2}$) si ricava

$$a_{cm,1} = -\frac{5F_e}{7m_1}; \qquad a_{cm,2} = \frac{5F_e}{7m_2}$$
$$f_{s,1} = f_{s,2} = \frac{2}{7}F_e.$$

Da queste relazioni si vede immediatamente che i moduli delle due forze di attrito statico sono identici. Conseguentemente, la risultante delle forze esterne si annulla e, conseguentemente, la quantità di moto del sistema si dovrà conservare!
Nell'istante in cui le due sfere vengono lasciate andare il modulo della forza elastica è $F_e = k\Delta x_0$ e quindi le accelerazioni iniziali dei loro centri di massa sono

$$a_{cm,1} = -\frac{5k\Delta x_0}{7m_1} = -2.68\,\mathrm{m/s^2}; \qquad a_{cm,2} = \frac{5k\Delta x_0}{7m_2} = 1.53\,\mathrm{m/s^2}$$

Per come abbiamo scritto le equazioni, si intende che questi siano i moduli delle accelerazioni iniziali.
Per il calcolo delle velocità finali dei centri di massa delle sfere possiamo fare appello alle conservazioni della quantità di moto e dell'energia meccanica (conseguente all'assenza di dissipazioni). A tali conservazioni corrispondono le seguenti

$$m_1 v_{cm,1} + m_2 v_{cm,2} = 0$$
$$\frac{1}{2}k\Delta x_0^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{cm,1}^2 + \frac{1}{2}I_{cm,1}\omega_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{cm,2}^2 + \frac{1}{2}I_{cm,2}\omega_2^2$$

dove, nella seconda, si riconoscono i termini di energia cinetica translazionale e rotazionale delle due sfere. Tenendo presente la relazione di puro rotolamento ($\omega = v_{cm}/R$) ed esplicitando le espressioni dei momenti d'inerzia la seconda può essere riscritta come segue

$$k\Delta x_0^2 = m_1 v_{cm,1}^2 + \frac{2}{5}m_1 v_{cm,1}^2 + m_2 v_{cm,2}^2 + \frac{2}{5}m_2 v_{cm,2}^2 = \frac{7}{5}m_1 v_{cm,1}^2 + \frac{7}{5}m_2 v_{cm,2}^2$$

Da questa, tenendo presente che dalla conservazione della quantità di moto è

$$v_{cm,1} = -\frac{m_2}{m_1}v_{cm,1},$$

si ricava

$$k\Delta x_0^2 = \frac{7}{5}m_2\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)v_{cm,2}^2,$$

e quindi

$$v_{cm,2} = \Delta x_0\sqrt{\frac{5km_1}{7m_2(m_1+m_2)}} = 0.288\,\mathrm{m/s}; \qquad v_{cm,1} = -\Delta x_0\sqrt{\frac{5km_2}{7m_1(m_1+m_2)}} = -0.506\,\mathrm{m/s}.$$

PROBLEMA 3 Una macchina termica reale, che scambia calore con due sorgenti, ha un rendimento η' pari alla metà di quello di una macchina termica di Carnot che opera tra le stesse temperature. La macchina riceve calore da una sorgente costituita da una miscela di acqua e vapore acqueo in equilibrio alla pressione normale (cioè alla pressione atmosferica), sviluppa una potenza meccanica $P' = 550\,\mathrm{W}$ e cede calore alla seconda sorgente con una velocità di 1200 kcal/h.
Determinare la temperatura T_2 della seconda sorgente.

Soluzione Indichiamo con Q_1' il calore che la macchina assorbe dalla sorgente a temperatura maggiore, T_1, e Q_2' quello che cede alla sorgente a temperatura inferiore, T_2. Dato che in un ciclo la variazione dell'energia interna è nulla e gli scambi di calore avvengono solo con le due sorgenti, dalla 1^a legge della termodinamica segue che

$$L' = Q' = Q_1' - Q_2',$$

dove L' è il lavoro prodotto dalla macchina, mentre il rendimento della macchina è definito come

$$\eta' = \frac{L'}{Q'_1} = \frac{Q'_1 - Q'_2}{Q'_1}.$$

Tenendo presente che il rendimento della macchina di Carnot è pari a

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1},$$

e che, nel caso attuale è $\eta' = \frac{1}{2}\eta$, allora possiamo scrivere

$$\frac{Q'_1 - Q'_2}{Q'_1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right),$$

dalla quale ricaviamo

$$T_2 = T_1 \left[1 - \frac{2(Q'_1 - Q'_2)}{Q'_1}\right] = T_1 \left[1 - \frac{2L'}{L' + Q'_2}\right].$$

Ora si noti che T_1 è la temperatura della sorgente calda e cioè quella costituita dalla miscela di acqua e vapore acque in equilibrio alla pressione atmosferia: ovviamente è $T_1 = 100\,^\circ\mathrm{C} = 373.15\,\mathrm{K}$. D'altra parte, dai dati del problema di capisce che se, indicando con Δt la durata di un ciclo della macchina, è

$$L' = P'\Delta t; \qquad Q'_2 = (1200\,\mathrm{kcal/h}) \cdot \Delta t = 1395\,\mathrm{W} \cdot \Delta t,$$

da cui otteniamo

$$T_2 = T_1 \left[1 - \frac{2P'}{P' + 1395\,\mathrm{W}}\right] = 373.15\,\mathrm{K} \left[1 - \frac{2 \cdot 500\,\mathrm{W}}{550\,\mathrm{W} + 1395\,\mathrm{W}}\right] = 162.11\,\mathrm{K} = -111\,^\circ\mathrm{C}.$$
