Università degli Studi di Udine, Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Esami di FISICA I (9 CFU) e Fisica Generale 1 (12 CFU)
A.A. 2021/2022, Sessione invernale 2022, Secondo Appello, Prova scritta, 8 Febbraio 2022

TESTI E SOLUZIONI DEI PROBLEMI

PROBLEMA 1 Un corpo di massa $m_1 = 5.00\,\mathrm{kg}$ è inizialmente in quiete nell'origine dell'asse x. A partire dall'istante $t = 0$, sul corpo prende ad agire una forza $\vec{F}$ diretta lungo l'asse x la cui ampiezza varia in funzione del tempo secondo la legge

$$F(t) = F_0\left(2 - \frac{t}{t_0}\right)\frac{t}{t_0},$$

dove $F_0 = 10.0\,\mathrm{N}$ e $t_0 = 2.00\,\mathrm{s}$. Valori di F positivi (negativi) corrispondono ad $\vec{F}$ concorde (discorde) all'asse x. $\vec{F}$ agisce nell'intervallo di tempo $(0, 3t_0)$ ed è l'unica forza agente sul corpo.
Determinare:

A. la massima velocità raggiunta dal corpo nell'intervallo $(0, 3t_0)$ e l'istante in cui ciò avviene;
B. lo spazio percorso complessivamente dal corpo;
C. l'impulso totale che la forza $\vec{F}$ conferisce al corpo;
D. il lavoro complessivo della stessa nell'intero intervallo.

Soluzione Come vediamo la forza è nulla a $t = 0$, poi si mantiene positiva nell'intervallo $(0, 2t_0)$, si annulla in $t = 2t_0$ e quindi nell'intervallo $(2t_0, 3t_0)$ diventa negativa.
D'altra parte, dalla 2^a legge della dinamica segue che

$$ma = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F(t) \quad \Rightarrow \quad v(t) = \frac{1}{m}\int_0^t F(t')\mathrm{d}t',$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che la velocità iniziale (a $t = 0$) è nulla. Dalla proporzionalitá tra $F(t)$ e $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ capiamo che il massimo della velocità corrisponderà all'istante (o ad uno degli istanti) in cui l'ampiezza della forza si annulla (o, al limite, in uno degli estremi dell'intervallo $(0, 3t_0)$). Quindi, sapendo che $v(0) = 0$, e osservando l'espressione di $F(t)$ è immediato capire che la velocità sarà massima in corrispondenza di

$$t_{max} = 2t_0 = 4.00\,\mathrm{s}.$$

Per ricavare il valore di $v_{max} = v(t_{max}$, dobbiamo calcolare l'integrale precedente pari a

$$\int_0^t F(t')\mathrm{d}t' = F_0\int_0^t\left(2 - \frac{t'}{t_0}\right)\frac{t'}{t_0} = F_0t_0\int_0^{t/t_0}(2 - z)\,z\mathrm{d}z =$$
$$= F_0t_0\left[z^2 - \frac{z^3}{3}\right]_0^{t/t_0} = F_0t_0\left[\left(\frac{t}{t_0}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{t}{t_0}\right)^3\right].$$

e da questa otteniamo

$$v(t) = \frac{F_0t_0}{m}\left[\left(\frac{t}{t_0}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{t}{t_0}\right)^3\right] \quad \Rightarrow \quad v_{max} = v(t_{max}) = \frac{4}{3}\frac{F_0t_0}{m} = 5.33\,\mathrm{m/s}.$$

Notando anche che nell'intervallo $(0, 3t_0)$ la $v(t)$ non è mai negativa, si capisce che, durante il suo moto, il corpo non arretra mai. Perciò, lo spazio da lui percorso si ottiene integrando la $v(t)$ tra $t = 0$ e $t = 3t_0$. Cioè

$$\Delta s = \int_0^{3t_0} v(t)\mathrm{d}t = \frac{F_0t_0}{m}\int_0^{3t_0}\left[\left(\frac{t}{t_0}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{t}{t_0}\right)^3\right]\mathrm{d}z =$$
$$= \frac{F_0t_0^2}{m}\int_0^3\left(z^2 - \frac{z^3}{3}\right)\mathrm{d}z = \frac{F_0t_0^2}{m}\left[\frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{12}\right]_0^3 = \frac{9}{4}\frac{F_0t_0^2}{m} = 18.0\,\mathrm{m}.$$

Per definizione, l'impulso che la forza conferisce al corpo nell'intero intervallo è pari all'integrale seguente

$$J = \int_0^{3t_0} F(t)\mathrm{d}t,$$

che, per quanto prima ricavato, corrisponde semplicemente a

$$J = mv(3t_0) = F_0 t_0 \left[\left(\frac{3t_0}{t_0} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{3t_0}{t_0} \right)^3 \right] = 0.$$

Come si vede, l'impulso conferito al corpo è nullo. Dal teorema dell'impulso quindi segue che, nello stesso intervallo, la variazione di quantità di moto del corpo è nulla, e questo è in perfetto accordo con il fatto che è $v(3t_0) = v(0) = 0$.
Conseguentemente, dato che non c'è variazione della velocità, anche la variazione dell'energia cinetica del corpo è nulla nell'intervallo $(0, 3t_0)$. Perciò, dal teorema dell'energia cinetica segue che è nullo anche il lavoro complessivo della forza!

PROBLEMA 2 Un satellite artificiale, di massa $m = 500\,\mathrm{kg}$, viene dapprima portato ad una distanza $R = 5.00 \cdot 10^4\,\mathrm{km}$ dal centro della Terra e quindi lanciato con una velocità v_0 tale da fargli percorrere un'orbita circolare di raggio R. Si supponga che l'orbita seguita dal satellite giaccia nel piano che contiene l'equatore terrestre e che il verso di percorrenza sia concorde con con quello della rotazione della Terra intorno al suo asse.

a) Determinare la velocità v_0 del satellite;

b) Calcolare, tenendo conto della rotazione terrestre, il tempo in cui il satellite compie un giro completo rispetto ad un sistema solidale con la Terra, specificando in quale direzione esso si muove.

Qualche tempo dopo, a causa di un urto con un meteorite, il satellite viene deviato su un'orbita ellittica (giacente sempre nel piano equatoriale) avente i punti di massima e minima distanza dal centro della Terra (rispettivamente afelio e perielio dell'orbita) alle distanze $r_1 = R$ e $r_2 = R/2$. Determinare:

c) le velocità v_1 e v_2 del satellite nei punti di afelio e perielio dell'orbita ellittica;

d) di quanto è cambiata l'energia meccanica del satellite rispetto a quando percorreva l'orbita circolare, di cui ai punti a) e b).

[*Trascurare ogni effetto della resistenza dell'atmosfera. Le velocità v_0, v_1 e v_2 si intendono calcolate rispetto ad un sistema non rotante. Per la massa della Terra usare il valore $M = 5.98 \cdot 10^{24}$* kg.]

Soluzione Nel caso in cui il satellite percorre l'orbita circolare di raggio R la forza centripeta di cui esso risente dovrà essere pari alla forza gravitazionale con cui esso è attratto verso il centro della Terra. Quindi

$$m\frac{v_0^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2} \quad \Rightarrow \quad v_0^2 = \frac{GM}{R} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}} = 2.82 \cdot 10^3 \text{ m/s}.$$

Dato che l'orbita è nel piano equatoriale, da un punto dell'asse terrestre al di sopra del polo Nord vedremmo ruotare sia la Terra che il satellite in verso antiorario con le seguenti velocità angolari

$$\omega_{terra} = \frac{2\pi}{(1 \text{ giorno})} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} = 7.27 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}; \quad \omega_s = \frac{v_0}{R} = 5.65 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}.$$

Nel sistema (non rotante) in cui ci troviamo possiamo scrivere che $\omega_s = \omega_{terra} + \omega_s'$, dove ω_s' è (ovviamente) la velocità angolare del satellite rispetto al sistema solidale con la Terra. Quindi, ricaviamo

$$\omega_s' = \omega_s - \omega_{terra} = -1.62 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s},$$

il cui segno negativo ci fa capire che un osservatore in quiete sulla superficie terrestre vedrà ruotare il satellite in verso opposto al verso di rotazione della Terra: cioè lo vedrà andare verso Ovest. Il tempo in cui il satellite percorrerà un giro completo rispetto alla Terra sarà quindi

$$T_s' = \frac{2\pi}{|\omega_s'|} = 3.88 \cdot 10^5 \text{ s} \approx 107 \text{ h} \approx 4.5 \text{ giorni}.$$

Quando il satellite segue l'orbita ellittica, per il calcolo delle velocità nei due punti menzionati possiamo fare appello alla conservazione dell'energia meccanica e del momento angolare del satellite che possono essere tradotte nelle seguenti

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{Mm}{R/2} \\ mRv_1 = m\frac{R}{2}v_2 \end{cases}.$$

Dalla seconda ricaviamo $v_2 = 2v_1$ che sostituita nella prima ci permette di ricavare

$$\frac{1}{2}v_1^2 - G\frac{M}{R} = 2v_1^2 - 2G\frac{M}{R} \quad \Rightarrow \quad 3v_1^2 = 2G\frac{M}{R} \quad \Rightarrow \quad v_1^2 = \frac{2GM}{3R},$$

e conseguentemente

$$v_1 = \sqrt{\frac{2GM}{3R}} = 2.31 \cdot 10^3 \text{ m/s}; \qquad v_2 = 2 \cdot v_1 = \sqrt{\frac{8GM}{3R}} = 4.62 \cdot 10^3 \text{ m/s}.$$

Infine, notando che le energie meccaniche del satellite nei due casi esaminati sono le seguenti

$$E_{circ} = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}m\frac{GM}{R} - G\frac{Mm}{R} = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{R},$$

$$E_{ellisse} = \frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}m\frac{2GM}{3R} - G\frac{Mm}{R} = -\frac{2}{3}G\frac{Mm}{R},$$

allora la variazione di energia richiesta al punto d) è data da

$$\Delta E = E_{ellisse} - E_{circ} = \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) G\frac{Mm}{R} = -\frac{1}{6}\frac{GMm}{R} = -6.65 \cdot 10^8 \text{ J}.$$

PROBLEMA 3 Una macchina termica, che usa n moli di un gas perfetto biatomico, esegue un ciclo reversibile $N = 30$ volte al secondo. In tale ciclo gli stati di equilibrio 1, 2 e 3 sono connessi dalle seguenti trasformazioni reversibili: $1 \to 2$ espansione di equazione $T = kV^2$ con $k = 20.0\,\text{K/dm}^6$; $2 \to 3$ raffreddamento isocoro a volume pari a V_2; $3 \to 1$ compressione di equazione $T = \frac{T_1}{V_1}V$ (dove T_1 e V_1 corrispondono alla temperatura e al volume del gas nello stato 1). Per gli stati 1 e 2 sappiamo anche che è $p_1 = 2.00\,\text{atm}$, $V_1 = 4.00\,\text{dm}^3$ e $V_2 = 2V_1$.
Si chiede:

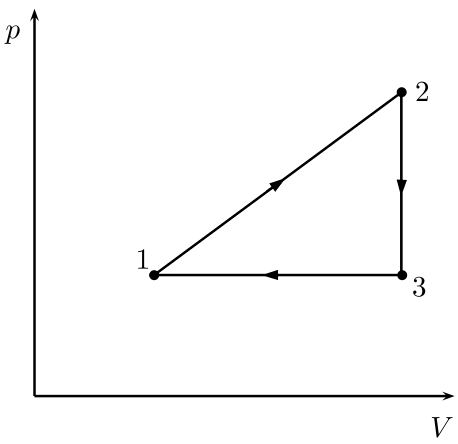
- **A.** analizzare le tre trasformazioni e disegnare il ciclo nel piano p–V;
- **B.** determinare il numero di moli n di gas e le temperature T_1, T_2 eT_3 dei tre stati;
- **C.** calcolare le quantità di calore Q_{12}, Q_{23} e Q_{31} scambiate dal gas nelle tre trasformazioni.

Soluzione Al fine di disegnare il ciclo nel piano p–V, analizziamo le diverse trasformazioni.
Per la $1 \to 2$, facendo uso dell'equazione di stato dei gas ideali abbiamo

$$T = kV^2 \quad \to \quad \frac{pV}{nR} = kV^2 \quad \Rightarrow \quad p = nRkV,$$

dalla quale si capisce che la trasformazione sarà rappresentata da un segmento di retta (il cui prolungamento passa per l'origine) percorso nel verso di V crescente.
La trasformazione $2 \to 3$ è un'isocora.
La $3 \to 1$ è un'isobara dato che

$$T = \frac{T_1}{V_1}V \quad \Rightarrow \quad \frac{T}{V} = \frac{T_1}{V_1} = \frac{p}{nR}.$$



Conseguentemente, il cliclo ha la forma indicata in figura.
Il numero di moli di gas è

$$n = \frac{p_1 V_1}{RT_1} = \frac{p_1 V_1}{RkV_1^2} = \frac{p_1}{RkV_1} = 0.304\,\mathrm{mol}.$$

Invece per le temperature dei tre stati si ha

$$T_1 = kV_1^2 = 320\,\mathrm{K}; \qquad T_2 = kV_2^2 = 4kV_1^2 = 4T_1 = 1.28 \cdot 10^3\,\mathrm{K}; \qquad T_3 = \frac{T_1}{V_1} V_3 = \frac{T_1}{V_1} 2V_1 = 2T_1 = 640\,\mathrm{K}.$$

Calcoliamo quindi i calori scambiati. Per le trasformazioni $2 \to 3$ e $3 \to 1$ la cosa è immediata

$$Q_{23} = nc_V(T_3 - T_2) = \frac{5}{2} nR(2T_1 - 4T_1) = -5nRT_1 = -4.04 \cdot 10^3\,\mathrm{J};$$

$$Q_{31} = nc_p(T_1 - T_3) = \frac{7}{2} nR(T_1 - 2T_1) = -\frac{7}{2} nRT_1 = -2.83 \cdot 10^3\,\mathrm{J}.$$

Per la trasformazione $1 \to 2$ dobbiamo ricorrere alla 1^a legge della termodinamica dalla quale si ottiene

$$Q_{12} = \Delta E_{int,12} + L_{12}$$

dove

$$\Delta E_{int,12} = nc_V(T_2 - T_1) = \frac{15}{2} nRT_1,$$

e il lavoro può essere calcolato per via grafica ottenendo

$$\begin{aligned} L_{12} &= \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_2 - V_1) = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)V_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{nRT_1}{V_1} + \frac{nRT_2}{V_2}\right) V_1 = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{nRT_1}{V_1} + \frac{nR4T_1}{2V_1}\right) V_1 = \frac{3}{2} nRT_1. \end{aligned}$$

Perciò, abbiamo

$$Q_{12} = \Delta E_{int,12} + L_{12} = \frac{15}{2} nRT_1 + \frac{3}{2} nRT_1 = 9nRT_1 = 7.28 \cdot 10^3\,\mathrm{J}.$$
